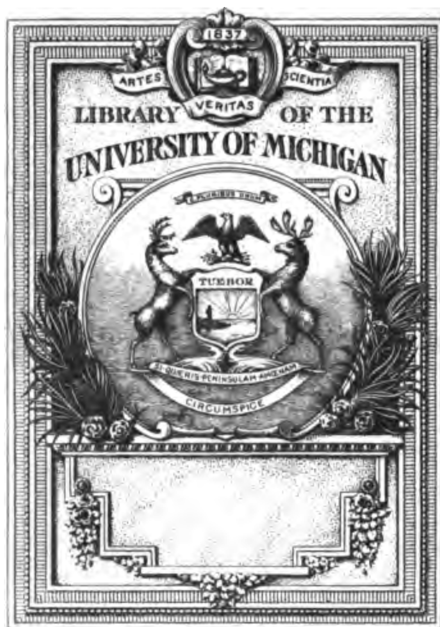

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

SEX
MATHEMATICI ARGVMENTI
DISSERTATIONES.

IN VSVM
AVDITORVM SVORVM

EDIDIT

ANDREAS METZ,
PHILOS. ET THEOLOGIAE DOCTOR, ET PHILOSOPHIAE IN GYMNASIO ATQVE VNIVERSITATE WIRCEBVRGENSI PROFESSOR RESP. PVBL. ET ORD.

BAMBERGAE ET WIRCEBVRGI.
Sumptibus Viduae Tobiae Goebhardt.
1799.

Tolle academias, tolle aduocatos (vti nec illae, nec hi ad essentiam reipublicae pertinent,) imo tolle leges peregrinas, obscuras, leges scriptas. Fac ICtum bello eiectum, vel a Turcis captum, iurisprudentiae studium ipsi nihil proderit, Matheseos multum. Vsus eius in bello, & pace in negotiis cameralibus, in iudiciis, in rebus singulorum patrum familias domesticis. Vsus eius apud Turcas, Germanos, Gallos & omnes Populos. Vsus in aula, in vrbe, in pago &c.

Illust. THOMASIVS in cautelis. Cap. XI. §. 10.

PROOEMIVM.

Quae ad conscribendas hasce mathematici argumenti Dissertationes me causa impulit, ea in sincero, Tironibus Matheseos elementaris, cuius praeter Logicam & Metaphysicam quolibet anno secundo in Gymnasio nostro Principia trado, tramitem planiorem reddendi studio tota continetur. Equidem non deest nobis Matheseos elementaris compendium, a D. Francisco TRENTEL, Matheseos in alma nostra Iulia Professore p. & o., & Praeceptore quondam meo, non sine pietatis sensu nominando, viginti quinque abhinc annis editum. Ast vti scientiam fere quamque, ita & Mathesin longo hoc temporis interuallo ad maiorem culturae gradum promotam esse, quam qui in compendiis antea

editis

editis reperiatur, non vllus rei peritus arbiter erit, qui inficias ire ausit. Vnde fit, vt, nisi compendium iam dudum debita laude donatum, & introductum abolere velis, aut illud emendatius denuo edendi veniam habeas, Tironibus ea, quae quoad vnum alterumue caput adcuratius pertractari possunt, vel debeant prorsus reficeri, vel prolata memoriae eorum relinqui vel dictari. Sed qui duo priora suadeat, spero fore Neminem, qui studiosae iuuentutis commoda spectat, atque indolem nouit. Posterius igitur eligendum. Ast praeterquam quod calamus tironum saepius fallax sit, summam quoque & Praeceptori *Dictatio*, & discentibus *Scriptio* molestiam creat, & magnam temporis scholastici partem rapit. Vnde factum, vt ipsemet ea, quae in compendio Trenteliano vel supplenda, vel ordinatius hinc inde, atque clarius, rigidiusue pertractanda videbantur, conscribendi, atque sub titulo *Dissertationum* praelo subiiciendi consilium caperem.

Harum itaque Dissertationum scopus non est, praefato compendio nouum substituere. Non enim cunctas Matheseos elementaris, imo ne Arithmetices quidem elementaris Materias, Tironi scitu necessarias, sed eas tantum complectuntur, quae in compendio isto vel omnino desunt, vel saltem clariorem & hinc inde rigidiorem, atque ordinatiorem Deductionem admittant, postulantque. Atque

vt

vt ne Filum praelectionum, ad ductum harum Dissertationum *suo loco* (in Materiis nimirum, quas rei naturae conuenientius, atque ordinatius & rigidius pertractare studui,) instituendarum continuo interrumpendi necessitatem relinquerem, vnamquamque Materiam, quam exposui, *complete*, quantum respectu Tironum satis est, * pertractaui. Ex quo, cur hinc inde eiusmodi quoque capita, quae in Trenteliano etiam compendio similiter exposita reperiuntur, contextui interseruerim intelligere pronum.

Fontes quod attinet, quibus vsus sum, candido & gratissimo hic animo praeprimis nomino Matheseos elementaris Institutiones *ordles* D. Fr. TRENTEL, quibus frui mihi licuit. Iis enim *solis* praeter solutionem Problematis VIti, VIImi (Diss. IV. Nro. 15) & XIVti (Diss. V.) in acceptis quoque refero *compendium*, quod Formulis ad Materiam de interusurio & progressionum Theoriam pertinentibus inest, licet ipsemet ego veritatem earum calculo proprio, eoque saepe spinoso eruere, siue

* Dissertationis I Articulo I *completam* scientiae mathematicae Delineationem, ad ductum Cl. I. SCHVLZII, adornatam non ideo scripsi, vt eam statim in vestibulo Matheseos Tironibus totam explicem, (frustraneum enim hoc esse, ipsemet noui,) sed vt ea, quae statim ab initio, si fusius oretenus exponantur, iis peruia sunt, typis expressa habeant, & caetera, suo loco exponenda, relegere possint.

siue eas construere debuerim, antequam illas praelo submittere possem.

Praeterea vsus sum Praesidiis, quae Viri Clarissimi KAESTNERVS, SCHVLZIVS, I. F. LORENZ, G. VEGA, Abel BVRIA, DE LA CAILLE, F. HVBERTI & P. MAKO in rem mathematicam praeclare praestiterunt, vti per decursum licet non vbique notaui, vbi eandem cum illis vel Theoriam vel Demonstrationem statui. Quod vt nequis mihi vitio vertat, praeter citationes in decursu obuias sequentes adhuc hoc loco subnecto.

1) In Dissertationis primae Articulo II, vbi de Multiplicatione & Diuisione Quantitatum *integrarum* sermo est, secutus sum Cl. I. F. LORENZ, quantum ad Corollaria ex definitione vtriusque deducta, & ad Demonstrationem Positionis attinet, eadem signa vtrinque dare +, & diuersa dare —. Vbi vero in eodem hoc Articulo sermo est de Demonstratione Regularum Multiplicationis & Diuisionis Quantitatum *fractarum*, secutus sum Cl. VEGA (Vorlesungen über die Mathematik. I. Band. 2te Aufl. Wien 1793. §. 87—92.)

2) In Dissertatione secunda, quae de eleuatione Quantitatum ad Potentias & Extractione Radicum ex Potentiis datis agit, secutus sum Cl. HVBERTI, * & qui post eum rem

* Institutionum mathem. opusc. I. Arithmetia §. 76. seq.

rem *eodem ferme modo* proposuit, Cl. I. SCHVLZ,* ita tamen, vt vbi fieri necessum erat, Demonstrationis Rigorem clarius proponere studerem, quam ab vtroque propositus fuerat.

3) In Dissertatione quarta Demonstrationem Theorematis 11 & 12 vti & eius, quod in Corollario 22 continetur, ad ductum Cl. KAESTNER atque I. F. LORENZ institui. Demum

4) In Dissertatione quinta, quae de Logarithmis agit, & quam iam anno 1795 occasione Disputationis publicae ex Philosophia & Mathesi edidi, ad genuinam logarithmorum Definitionem Nutu solo perueni, quem Cl. LORENZ mihi Propositione dederat, *quod quilibet Numerus ceu ratio Multitudinis ad Vnitatem spectari possit.* Theoremata vero, calculum ope Logarithmorum instituendum concernentia, eo modo demonstraui, quem Cl. VEGA in Introductione ad Tabulas suas logarithmicas Viennae 1783. editas adhibuit, licet eorundem veritas ex ipsa etiam logarithmorum definitione facillime deduci queat, & a me nunquam non viua simul voce deducta fuerit. Praeterea Problemata Numeri XII. & Coroll. Numeri XV &c. ab eodem iam Viro proposita & soluta sunt.

Quibus candide expositis haud timeo, ne lectorum vllus, qui aequitatis amans est, me vanae

---

* Anfangsgründe der reinen Mathesis.

vanae gloriae studii insimulaturus sit. Hoc enim & cum praefata declaratione pugnat, & a me semper abfuit, & adhucdum abest, & semper aberit, eiusque loco solum discipulorum commodis consulendi desiderium me totum hactenus tenuit, tenet, & porro tenebit. Quod si Viris bonis & studiosae iuuentuti bene volentibus placuisse videro, impense laetabor, & nobilissimum absoluti laboris perquam spinosi praemium me tulisse arbitrabor.

Scripsi Wirceburgi 6ta Iunii 1799.

A. Metz, Dr. & Prof.

DISSER-

DISSERTATIO I.
DE INDOLE MATHESEOS
VNA CVM PRIMIS
CALCVLIS LITERALIBVS ARITHMETICES VVLGARIS.

ARTICVLVS I.
DE INDOLE MATHESEOS.

CAPVT I.
DE OBIECTO ET PARTIBVS MATHESEOS.

§. 1.

Res homogeneae et heterogeneae quid ſint?

Res duae, pluresue dicuntur *homogeneae (gleichartig* a graeco *ὁμος idem*, & *γένος ſpecies)*, quatenus ſpectantur ſecundum id, quo inter ſe conueniunt. Secus vocantur *heterogeneae* (*verſchiedenartig)*. Sub diuerſo itaque reſpectu res duae, pluresue *homogeneae*, & *heterogeneae* dici poſſunt. E. g. duo globi, alter *aureus*, & alter *argenteus*, ſunt *homogenei*, quatenus ſpectantur vt *globi*; heterogenei autem ſunt, quatenus alter vt *aureus*, & alter vt *argenteus* conſideratur.

§. 2.
Vnitas.

Rerum *homogenearum* (1), quarum inter se connexione Totum quoddam generatur, quaelibet respectu huius Totius *Vnitas* compellatur (Einheit — Mass). Sic Cruciger est Vnitas respectu Floreni, quia sexagies sumtus Florenum generat. Id, cui *Vnitas* competit, est *vnum*.

§. 3.
Quantitas.

Determinando, quoties Vnitas (2) ad generandam aliquam rem secum ipsa connecti debeat, eiusdem rei *Quantitas* (Grösse) definitur. *Qualitas* autem (Beschaffenheit) in modo cernitur, quo variae rei alicuius partes inter se connexae sunt. Id, cui Quantitas competit, *Quantum* vocatur. Res omnes ergo, sensibus externis subiectae, *Quanta* sunt. Et quia Vnitas, ex cuius secum ipsa connexione Quantum oritur, denuo sibi addi, aut a Quanto iam generato demi rursus potest, consequens est, vt, quidquid *Quantum* est, augeri, minuiue possit. Vnde Quantitas recte etiam definitur *id, quod in re quadam augeri, minuique potest.*

§. 4.
Mathesis.

Scientia Quantorum (3) *Mathesis* est. *Scientia (Systema)* est complexus cognitionum, ita inter se connexarum, vt sequentes continuo ex antecedentibus fluant, adeoque intelligi nequeant, nisi praecedentes intellectae fuerint. Positio ergo prima

per

per se manifesta sit, necesse est, atque haec Principium (Grundsatz) vocatur. Differt *Scientia* ab *adgregato* seu *Rhapsodia*. Haec etenim in *cumulo* duntaxat cognitionum cernitur, quae quidem se inuicem consequuntur, & iuxta se positae sunt; (Sie folgen zwar auf einander); ast sequentes ex praecedentibus non fluunt (sie folgen nicht aus einander). Quia iam, quae de Quantis tractat, doctrina est huiusmodi, vt arctissimus ille, qui ad *Scientiam* (κατ' ἐξοχὴν) requiritur, partium nexus *modo eminenti* in ea reperiatur, vti Matheseos gnaris cognitum est; factum inde putant, vt, licet vocabulum *Matheseos* Graecis *Scientiam* seu *Doctrinam* generatim denotet (μάθησις a μανθάνω *intelligo*, *cognosco*), hanc ipsam tamen de Quantorum Proprietatibus Doctrinam κατ' ἐξοχὴν *Scientiam* i. e. *Mathesin* dixerint. Quidquid sit, nobis sufficit, monuisse, Mathesin *Scientiam Quantorum* definiri.

§. 5.

Mathesis vel pura est, vel mixta.

Mathesis (4) vel *pura* est, vel *mixta*, quae etiam *adplicata* compellatur. *Pura* dicitur, quatenus Proprietates Quantorum, *qua talium*, i. e. ita disquirit, vt de rebus ipsis, actu existentibus, queis *Quantitas* inest, praescindat, adeoque illi perinde sit, *Quanta*, de quibus loquitur, siue montes sint, siue turres, siue stellae, siue metalla, siue quidquam aliud. *Purum* nempe generatim illud omne dicitur, cui non sunt admixtae partes *heterogeneae*, i. e. tales, quae non sunt *eiusdem speciei*, cuius ipsa illa res est, de qua sermo est. Hoc sensu aurum, aer, aqua &c. *pura* dicuntur;

 Secus

Secus vocantur *mixta*. Similiter *Scientia* omnis dicitur *pura*, quae cunctas, quas percenset, cognitiones ex *eodem* fonte haurit, & quae proinde eas tantum cognitiones pertractat, quae necessariae sunt, vt obiecti istius, circa quod versatur, Proprietates manifestae fiant. Vnde *Mathesis*, quia obiectum eius est Quantitas (4), *pura* est, si eas tantum cognitiones pertractet, quae ad intelligendas *Quantorum*, *qua talium*, Proprietates necessariae sunt, adeoque nulla Principia *admisceat*, quae non de *Quantis qua talibus*, sed de Quantis *determinatis*, in natura existentibus, valida sunt. Secus *mixta*, vel *adplicata* recte dicitur. Namque dum determinatarum Naturae rerum *Quantitas* e. g. altitudo alicuius turris, aut montis, vel distantia duorum locorum &c. definienda est, Principiorum Matheseos *purae* debet fieri *adplicatio*, sicuti dum oratio *panegyrica* vel quaecunque alia *specialis* componenda est, Principia praeprimis Orationis *generatim* spectatae obseruanda sunt. Vnde huic Matheseos parti nomen *adplicatae* haesit. Vocatur etiam *mixta*, quia, vt determinatarum Naturae rerum quaesita Quantitas definiatur, non sufficit, Matheseos duntaxat *purae* Principia nosse, sed ad plura alia adhuc attendendum est, quae non ex Natura *Quantorum* generatim, sed aliunde, e. g. ex obseruatione constant. Principia ergo Matheseos purae *miscentur* hic aliis adhuc cognitionibus, quae proprie non sunt *mathematicae*, quia non de Quantis, qua talibus, valent, adeoque haec Matheseos pars recte etiam *mixta* audit. Mathesis *pura*, quae semper intelligitur, vbi simpliciter (non addito τῷ *adplicata*) de Mathesi sermo est, (namque ea sola

Quan-

Quantorum qua *talium Proprietates*, circa quas Mathesis versatur, pertractat) vocatur etiam *theoretica*, quia Scientia quaeuis *theoretica* dicitur, quatenus duntaxat disquirit, quid obiectum illud sit, de quo sermonem instituit. Mathesis *adplicata* autem vocatur *technico-practica*, quia regulas artis (τεχνη — ars) statuit, queis conuenienter iuxta Principia Matheseos *purae* rerum *actualium* quaesita Quantitas citra errorem definiri possit, debeatque. Porro suopte ex dictis intelligitur, Mathesin *puram* adplicatae basin adeoque studium illius studio huius praemittendum esse.

§. 6.

Quanta sunt vel continua vel discreta.

Quanta qua talia (5) sunt ratione *Qualitatis* (3) vel *continua* (stätige Grösen), vel *discreta* (abgesonderte). *Continua* dicuntur, quorum partes ita inter se cohaerent, vt terminus (Ende) primae sit initium secundae, & sic porro, vt proinde inter partes nulla existant interstitia, e. g. linea — superficies. Quanta *discreta* autem illa sunt, quorum partes vel omnino non inter se cohaerent, sed duntaxat iuxta se positae sunt, vt Totum aliquod efficiant, e. g. Exercitus — Bibliotheca; vel cohaerent quidem, sed tamen ita, vt inter eas dentur interstitia, e. g. spongia, & caeterae res omnes, sensibus externis subiectae. Mathesis pura (5) ergo in duas partes abit — alteram, quae de Quantis *discretis*, & alteram, quae de *continuis* tractat.

§. 7.

§. 7.

Mathesis pura vel vniuersalis est, vel specialis.

Quanta siue *discreta* sint, siue *continua* (6), hanc habent Notam communem, quod *Quanta* sint. Ea ergo omnia, quae de *Quantis* prorsus *in abstracto*, i. e. ita spectatis valent, vt nec ad determinatas Naturae res, nec ad Quantorum *qualitatem* (6) attendatur, de Quantis etiam tam *discretis*, quam *continuis* vera sint, necesse est. Illa iam Matheseos purae pars, quae, praescindendo de diuersa Quantorum qualitate, id solum expendit, quod Quantis, prorsus in abstracto consideratis, conuenit, recte cum cl. SCHVLZ *) Mathesis *pura vniuersalis* dicitur. Opponitur illi Mathesis pura *specialis*, quae videlicet Proprietates Quantorum determinatae *Qualitatis* (6) demonstrat.

§. 8.

Mathesis pura vniuersalis est Arithmetica,

Quodsi Quanta prorsus *in abstracto* (7) spectentur, generalissimus, quo oriantur, modus expendendus occurrit. Modus autem iste in *Vnitatis* (2) secum ipsa connexione, i. e. *additione* cernitur (3). Matheseos purae vniuersalis ergo obiectum praecipuum est *additio*. Quia vero ad quaestionem, quoties Vnitas ad generandum aliquod Quantum secum ipsa connecti debeat, responderi non potest, nisi adsignando *Numerum* (i. e. determinatam Vnitatum multitudinem), qui id indicet; Numerorum autem scientia *Arithmetica*

(ab

*) Anfangsgründe der reinen Mathesis. Einleitung.

(ab αριθμος Numerus) vocatur: consequens est, vt Mathesis *pura vniuersalis* sit *Arithmetica*. Vnde calculi *Arithmeticae* ad omnes omnino Matheseos partes pertinent.

§. 9.

Mathesis pura specialis est Geometria.

Mathesis pura *specialis* versatur circa Quanta vel *discreta*, vel *continua* (7). Sed quia Quantum *discretum* (6) est duntaxat *adgregatum* quoddam, siue *Summa*, siue *Numerus* Quantorum homogeneorum, intelligitur, Matheseos purae specialis partem illam, quae circa Quanta *discreta* versatur, scientiam ab *Arithmetica* (8) distinctam non constituere. Relinquitur ergo tanquam Mathesis *pura specialis* sola Quantorum *continuorum* Scientia. Quanta autem *continua* sunt vel *extensiue* vel *intensiue* continua. Quanta *extensiua* sunt illa, quorum partes sunt *extra*, & *iuxta* se positae, ita vt connexione earum Quanta ipsa primum generentur, e. g. linea. Et quia hic Repraesentatio Totius fit primum possibilis Repraesentatione partium, Quanta extensiua recte etiam definiuntur ea, quorum, *qua totorum*, Repraesentatio fit primum Repraesentatione partium possibilis. Vnde, quid sint Quanta *extensiue* continua, intelligere pronum. Quanta autem *intensiua* sunt ea, quorum partes homogeneae non intelliguntur *extra*, & *iuxta se* positae, ita, vt earum connexione Quanta ipsa primum generentur, sed quae instar *Vnitatis* considerantur, quae modo *continue* vsque ad zerum decrescere possit; e. g. *calor*,

lor, *conscientia* &c. Heic Repraesentatio partium fit primum possibilis Repraesentatione totius, quia, vt, e. g. quid sit *maior* vel *minor* calor, intelligatur, intelligi praeprimis debet, quid sit *calor*, qua *Vnitas*. Vnde Quanta *intensiua* definiri etiam solent ea, quae considerantur vt *Vnitas*, ita, vt Repraesentatio partium possibilis non sit, nisi Repraesentatio totius praecesserit. Quantitas porro *intensiua* dicitur *gradus*. Quia vero Quanta *intensiue continua* non habent mensuram vniuersalem, qua, praescindendo de obiectis realibus, gradus eorum determinari possit, consequens est, vt pro Mathesi pura speciali Quanta duntaxat *extensiue continua* relinquantur. Huc vero *Tempus* pertinet & *Spatium*; vtriusque enim *Quanti* partes *homogeneae* ita inter se cohaerent, vt terminus praecedentis sit sine fine initium subsequentis; vnde Quanta *continua* sunt (6), & quia haec est & *Temporis*, & *Spatii* proprietas, vt, vbi de definito aliquo *tempore*, e. g. *hora*, & de definito aliquo spatio, e. g. linea, sermo est, Repraesentatio totius nonnisi Repraesentatione partium possibilis sit, vtrumque etiam Quantum *extensiue* continuum recte dicitur. Quia vero temporis nonnisi vnica est dimensio, scilicet secundum solam *longitudinem*; longitudo autem omnis *lineis* exhibetur, intelligitur, scientiam *spatii*, quo *lineae* pertinent, comprehendere simul scientiam *temporis*, qua *Quanti extensiue continui*, adeoque Mathesin puram specialem esse *spatii* duntaxat scientiam. Sed *Scientia, quae demonstrat proprietates spatii*, *Geometria* est: Mathesis pura specialis ergo est *Geometria*. Vnde Matheseos *purae* vniuersim partes sunt I. *Arithmetica*,

metica, II. *Geometria.* *) Illam huic praemittendam esse, ex dictis supra (7. 8.) liquet.

§. 10.

Arithmetices in vulgarem & sublimiorem diuisio.

Vtraque porro in *elementarem* vel *vulgarem*, & *sublimiorem* dispescitur. *Arithmetica vulgaris* simpliciores tantum, & *vulgares*, Numeros tractandi modos pertractat, quo pertinent I. *Additio*, *Subtractio*, *Multiplicatio*, *Diuisio* Numerorum tam *integrorum*, quam *fractorum*. II. Eleuatio eorundem ad Potentias. III. Extractio radicum. IV. Proportio. V. Progressio, vna cum logarithmis — paucis ea omnia, quae de Numeris intelligi possunt absque vsu *aequationum*, quae in diuersis eiusdem Quantitatis expressionibus consistunt. **) Ea vero Arithmetices pars, quae incognitas Quantitates ex cognitis ope *aequationum* inuenire, i. e. *Problemata* soluere docet, *sublimior*, vel *Algebra* ***) siue

*) Cl. SCHVLZE l. c.

**) Wenn eine und eben die selbe Grösse auf eine gedoppelte Art ausgedruckt wird, so sind beyde Ausdrücke einander gleich, und nun heisst dieser gedoppelte Ausdruck der nämlichen Grösse, in so fern wir auf seine Gleichheit sehen, eine *Gleichung* (aequatio). Findet die Arithmetik ihre Grössen ohne *Gleichungen*, so ist's die *gemeine*, oder *niedere* Arithmetik (elementaris). Braucht sie aber *Gleichungen* zur Erfindung der selben, so nennt man sie *Algebra*. Cl. W. F. Wucherers Anfangsgründe der *Arithmetik* &c. Carlsruhe 1782. §. 20.

***) Griechen und Araber erfanden Sie (die *Algebra*). König

siue *Analysis* vocatur. Alii tamen *Algebram* non nisi partem *Analyseos* eam esse volunt, quae circa Theoriam *aequationum* versetur, ope quarum dein *Analysis* incognitas Quantitates ex cognitis eruat. Quidquid sit, id certum est, vtramque (Arithmeticam *elementarem* & *subliniorem*), vt *Scientia* (1) Numerorum (8). dici possit, eiusmodi signa Numerorum adhibere debere, quae sint absolute vniuersalia, i. e. ita indeterminata, vt omnibus omnino *numeris* designandis inseruiant, cuiusmodi sunt literae alphabeti *a*, *b*, *c* &c. Sub eiusmodi literis enim intelligere potes Numerum *qualemcunque*, & *quantumcunque*. Non enim definitur illis, *quantus* sit *Numerus*, quem illis designas, i. e. *quot* Vnitatibus constet — neque definitur, *qualis* sit, i. e. cuius *qualitatis* Vnitatibus constet. *Ciffrae* autem, siue characteres Numerorum vulgo decem cogniti 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0; quos, quia ab Arabibus ad nos deuenerunt, *arabicos* siue rectius, vt Cl. WVCHERER vult, *indicos* dicunt, licet non determinent, de *quali* Numero sermo sit, adeoque eatenus sint aeque vniuersales, ac literae, determinant tamen *quantitatem* Numerorum, quia, *quot* Vnitatibus Numerus intelligendus constet, exprimunt. Vnde hactenus eam Vniuersalitatem non habent, quam literis alphabeti inesse vidimus. Atque

---

König *Geber* ist weder ihr Erfinder, noch Pathe. Denn ihr Nahme stammt vielmehr — von *Aljabar* v. *Almucabala* ab, welches im Arabischen *Oppositio*, und *Restitutio* heißt; oder von den 2 Stammwörtern. *Gebera* opposuit, und *Cabala* restituit, welches mit der Sache selbst, und den Benennungen der ältesten italiänischen Algebraiker treflich übereinstimmt. Wucherer l. c. §. 298.

Atque inde est, cur calculus Numerorum *literalis* (Buchstabenrechnung) calculo eorundem per *ciffras* vniuersalior sit, atque non solum in Arithmetica *sublimiore* (Algebra), sed & in *vulgari* adhibendus praecipiatur. Ex quo porro fluit, discrimen *Algebram* inter, & *Arithmeticam vulgarem* non exinde repeti posse, quod illa calculum *literalem*, haec vero *ciffricum* adhibeat, sed ex *diuersitate obiecti* deriuari debere, circa quod vtraque, qua Species *Arithmetices generatim*, versetur. Interim non negamus, 1) e re Tyronum esse, si primi numerici calculi ope *ciffrarum* instituantur, quippe quae eos intelligentiae eorum, abstractioni tantae, quantam calculus *literalis* requirit, necdum adsuetae, magis peruios reddunt. 2) Theoriam Proportionum, Progressionumque, & inde pendentium logarithmorum Theoriae *Algebrae* cum fundamento subiici posse, cum in illa Problemata occurrant, quorum solutio Regularum, quas *Algebra* statuit, cognitionem requirit. — Caeterum de vlteriore *Algebrae* in *elementarem* & *sublimiorem* diuisione suo loco (Dissertat. III.) dicetur.

§. 11.
Analyseos diuisio.

Quantitas *finita* (endliche Grösse) dicitur, quae multitudine Vnitatum assignabili constat, siue, quod idem est, in qua multitudo Vnitatum, ex quarum *synthesi* ipsa orta est, determinari potest. Infinita autem ea est, quae est omni dabili vel *maior*, vel *minor*. Illa *infinite magna*, vel simpliciter *infinita*, haec vero *infinite parua*, vel *infinitesima* nuncupatur. Vnde *Analysis*, quia me-

methodus est, Problemata soluendi, i. e. Valorem quantitatum incognitarum ex datis ope aequationum inueniendi, est vel Analysis *finitorum* (des Endlichen), vel *infinitorum* (des Unendlichen). Analysis *infinitorum* vocatur etiam Calculus *infinitesimalis*, (infinitesimalrechnung) quo Calculus *differentialis*, & *integralis* pertinet. *Ille* methodus est, quantitatum *finitarum* & *variabilium differentialia* i. e. incrementa, vel decrementa *infinitesima*, quae Quantitatum *finitarum* Elementa dicuntur, inueniendi. *Hic* vero methodus est, ex datis differentialibus *integralia* i. e. eas Quantitates inueniendi, ad quas data illa differentialia pertinent *).

§. 11.

Geometriae diuisio.

Geometria demonstrat Proprietates *spatii* (9). Spatium vero est Extensio vel *longa* tantum (*linea*) vel *longa* & *lata* (Superficies — Planum) vel *longa*, *lata* & *profunda* (Corpus — Solidum). Vnde Geometria abit in *Longimetriam*, *Planimetriam*, *Stereometriam*. Accedit *Trigonometria*, i. e. Scientia, datis tribus ex sex Trianguli partibus, quibus Triangulum determinatur, tres reliquas inueniendi. Haec obiectum *geometricum arithmetice* tractat, atque vel *plana* est, vel *sphaerica*, prout vel Triangula *plana*, vel *sphaerica* spectat.

§. 13.

*) P. Mako Institutio Calculi differentialis, & integralis. Vindobonae 1768.

§. 13.

Geometria porro vel *elementaris* est, vel *sublimior*. *Illa* solas linearum *rectarum*, & *circuli*, (& reliquarum inde generatarum Quantitatum extensiue continuarum, siue *Plana* sint, siue *Solida*), Proprietates demonstrat. *Haec* vero omnis generis *Curuas* alias (indeque generata Quanta), e. g. illas, quae praeter Circulum, & Triangulum ex Sectione Coni oriuntur, & quae propterea *Sectiones Conicae* (Kegelschnitte) adpellantur, disquirit. Vnde vocari quoque solet *Geometria Curuarum*. Atque iam intelligitur Matheseos *purae vniuersae* in *elementarem*, & *sublimiorem* diuisio.

§. 14.

Mathesis mixta vel adplicata.

Mathesis *mixta* (5) Quantitatem rerum, actu existentium, & nonnisi iuxta Principia Matheseos *purae* (5) determinabilem pro obiecto habet. Vnde tot eius partes sunt, quot diuersae Quantorum *realium* species existunt. Interim praecipuae tantum Quantorum *realium* species i. e. illa expenduntur, quorum Quantitatem definiendi methodus si perspecta fuerit, facile etiam reliquorum Quantorum quantitas determinari possit. Atque huc, praeter *Arithmeticam practicam*, & *Geodaesiam*, quae passim partibus *puris* (*Arithmeticae purae* & *Geometriae*) subiungi in Compendiis solent, referuntur sic dictae Scientiae omnes *physico-mathematicae*, quae ad quadruplicem classem passim reuocantur, videlicet I) Scientiae *mechanicae*, siue *dynamicae*, quae de Viribus Corporum agunt.

II)

II) *Opticae*, quae Phaenomena lucis exponunt. III) *Astronomicae*, quae de legibus motus, & Phaenomenis reliquis astrorum agunt. IV) *Architectonicae*, quae de exstruendis aedificiis & iis agunt, quae bellum gerentibus de Fortificatione &c. scitu necessaria sunt. Singulae plura Capita subalterna habent, quibus, quia in quolibet ferme Compendio *physico-mathematici* pertractantur, hic fusius exponendis supersedemus.

CAPVT II.

DE METHODO SIVE POTIVS TERMINOLOGIA MATHEMATICORVM.

§. 15.

Methodus mathematica quid?

Methodus generatim in modo cernitur, quo cognitiones, ad scientiam aliquam pertinentes, inter se connectuntur, eum in finem, vt *systematicam Vnitatem* (4) nanciscantur, atque ita & facile tradi, & comprehendi facile possint. Quae Cognitionum connexio si tam arcta fuerit, vt identidem subsequentes ex antecedentibus fluant, nihilque *indeterminatum*, atque *indemonstratum* relinquatur, *methodus* ipsa dicitur *mathematica*, propterea quod *Mathesis* est eius indolis, vt praefata partium *systematica* connexio, & deductio in ea peculiari quasi, & praecipuo modo (κατ' ἐξοχήν) reperiatur (4). Sed *Methodi mathematicae* indoles non tam aliorum *descriptione*, quam proprio potius *Matheseos* studio intelligitur. Sufficiat ergo hic Terminos duntaxat *technicos* exposuisse, queis *Mathematici* vtuntur, quorumque *sola* cognitione

tione ipsam *Methodi mathematicae* cognitionem absolui caue, ne falso opineris. Ordiuntur autem Mathematici a *Definitionibus*, progrediunturque ad *Axiomata*, *Postulata*, *Theoremata*, *Problemata*, *Demonstrationes*, & *Corollaria*, hisque omnibus, vbi necessum est, *Scholia* subiungunt.

§. 16.

Termini technici Mathematicorum. a) *Definitio.*

Definitio est Expositio (Angabe) Conceptus *determinati*, & *constanter* Vocabulo cuidam subiecti. E. g. dum Mathematici *Quantitatem* id in rebus esse dicunt, quod augeri, minuiue possit, *Definitionem Quantitatis* condunt. Quodsi in Definitione modus simul indicetur, quo res *definita* generari possit, Definitio vocatur *genetica* — secus *nominalis* (bloſse Worterklärung).

§. 17.

b) *Axioma. Postulatum. Theorema. Problema. Corollarium. Lemma. Hypothesis. Scholium.*

Subiectum est id omne, quod per aliud quidquam determinatum est, vel determinabile esse dicitur, & hoc alterum dicitur *Praedicatum*. Actus intellectus, quo praedicati ad subiectum habitudo determinatur, i. e. quo Praedicatum subiecto vel tribuitur vel denegatur, est *Iudicium*: & iudicium verbis expressum est *Propositio*, vel *Enunciatio*. Atque haec vel *theoretica* est, vel *practica*. *Illa* edicitur, quidquam aut esse, aut non esse. E. g. Partes ex Toto subductae si residuis adduntur, restituitur Totum. *Haec* vero

edici-

edicitur, quidquam aut fieri *posse*, aut *faciendum esse*. E. g. datam Rectam prolongare sine fine, & „distantiam duorum locorum metiri.“ Propositio *theoretica*, per se ita manifesta, vt nec possit Veritas eius ex alia Veritate superiore deriuari, nec eiusmodi deriuatione opus sit, dicitur *Axioma* *) (Grundsatz), secus *Theorema* (Lehrsatz) audit. Propositio *practica* indemonstrabilis & per se euidens vocatur *Postulatum* (Forderungssatz) v. g. *ab vno puncto ad aliud Rectam ducere*, & demonstrabilis *Problema* (Aufgabe) e. g. *datam Rectam bisecare*. Porro *Corollarium* est Propositio, quae ex praecedentibus suopte fluit (Folgerungssatz oder Zusatz), & *Lemma* (Lehnsatz) est Propositio, cuius Veritas alibi probata supponitur, & quae tantum adhibetur in subsidium, vt sequentium, quae ad scientiam pertractandam pertinent, Propositionum Veritas ostendi queat. Tandem Propositio, qua quidquam, sibi non repugnans, arbitrarie sumitur, vocatur *Hypothesis* (Wahlsatz), & *Scholion* (Anmerkung) est vberior eorum Expositio, quae magis dilucidandis vel *Definitionibus*, vel *Theorematis* &c. inseruiunt. *Scholia* ergo methodi mathematicae non sunt partes essentiales constitutiuae.

§. 18.

Theoremata & Problemata *Demonstrationem* postulant. Est autem Demonstratio ea Rationis functio,

---

*) *Axiomata* esse Iudicia *synthetica a priori*, in Metaphysica explanabitur.

functio, qua Nexus necessarius inter Propositionem vel *immediate* *), vel *mediate* certam, & aliam, cuius veritas ostendenda est, *intuitiue* vel *euidenter* deducitur. Vnde certitudo, quam Demonstratio (*apodixis* ab *αποδεικνυμι demonstro*) gignit, dicitur etiam *Euidentia*.

§. 19.

Ad Demonstrationem instituendam *Constructionem* **) Mathematici adhibent, qua, vti cl. DE LA

*) Immediate certae Positiones sunt, e. g. *Definitiones*, *Axiomata*, *Postulata*.

**) Succinctam Vocabuli *Constructionis* Expositionem dat Cl. KANT in libello, cui Titulus: „Ueber eine Entdeckung, nach der alle neue Kritik der r. Vernunft durch eine ältere entbehrlich gemacht werden soll.“ dum ita scribit: In allgemeiner Bedeutung kann alle Darstellung eines Begriffs durch die (selbstthätige) Hervorbringung einer, ihm correspondirenden Anschauung *Construction* heissen. Geschieht sie durch die blosse Einbildungskraft, einem Begriffe *a priori* gemäss, so heisst sie die *reine* (dergleichen der Mathematiker allen seinen Begriffen zu Grunde legt; daher Er an einem Zirkel, den Er mit seinem Stabe im Sande beschreibt, so unregelmässig er ausfalle, die Eigenschaften eines Zirkels überhaupt so vollkommen beweisen kann, als ob ihn der beste Künstler im Kupferstiche gezeichnet hätte). Wird sie aber an irgend einer Materie ausgeübet, so würde sie die *empirische* Construction heissen können. Die erstere kann auch die *schematische*, die zweyte die *technische* genannt werden. Die letztere, und wirklich nur uneigentlich so genannte *Construction*, weil sie nicht zur Wissenschaft, sondern zur Kunst gehöret, und durch Instrumente verzeichnet wird, ist nun entweder die *geometrische* durch *Zirkel* und *Lineal*, oder die *mechanische*,

 wozu

La Caille *) ait, partium earum rectam coordinationem intelligunt, quae ad demonstrandum Theorema sunt necessariae, seu etiam ordinem ipsum, qui in Problematis Resolutione est tenendus.

§. 20.

Demonstratio est vel *directa* vel *indirecta* seu *apagogica* (demonstratio ex absurdo). *Illa* Principiis, ex ipsa rei natura desumtis, docet, quidquam verum esse. *Haec* vero Contradictorium eius Propositionis, quae demonstranda est, sumit, & ex eo absurdi quidquam consequi docet, vt inde Propositionem datam admittendam esse ceu veram cogat. Vnde, quia ibi *docetur*, hic vero ad assensum praestandum *cogitur* Intellectus, *apagogicam* Demonstrationem *directae*, vel *ostensiuae*, si haec haberi possit, postponendam esse consequitur. Parem tamen vtraque gradum certitudinis praestat. Porro Demonstratio vel *progressiua* (synthetica) est, vel *regressiua* (analytica), prout vel ordiendo a Principiis progreditur ad *rationata* (Folgen), vel *incipiendo a rationatis regreditur ad rationes.*

Arti-

---

wozu andere Werkzeuge nöthig sind, wie z. B. die Zeichnung der übrigen Kegelschnitte aufser dem Zirkel." Sed haec ab iis tantum intelligi possunt, qui genuina Systematis Kantiani in Critica Rationis purae contenti cognitione imbuti sunt; vnde eorundem Explicatum non in Prolegomenis Matheseos, sed tunc demum Tyronibus dabimus, si Metaphysices Principia edocti fuerint, atque indolem Matheseos proprio eius studio perspexerint.

*) Elementa Algebrae & Geometriae in latinum traducta . . . a C. S. e S. J. §. 11.

ARTICVLVS II.

DE PRIMIS CALCVLIS LITERALIBVS ARITHMETICES VVLGARIS.

CAPVT I.

PRIMI CALCVLI LITERALES QVANTITATVM INTEGRARVM.

Praecognita.

I. DEFINITIO. Numerus est Collectio Vnitatum; siue Quantitas composita ex Vnitatibus (Artic. I. 2. 8.). *Vnitas* ergo, qua talis, non est Numerus. Numeros tractandi Scientia est *Arithmetica*, atque haec primam, eamque vniuersalem Matheseos partem constituit (ibid.).

II. HYPOTHESIS. Signa Numerorum sunt vel *Ciffrae* 1, 2, 3 &c. vel literae Alphabeti minores *a*, *b*, *c* &c. Has esse signa *vniuersaliora* Numerorum quam *Ciffras*, ex superioribus (ibid. §. 10.) liquet. Porro literae *initiales* a, b, c &c. denotant quantitates cognitas, *finales* autem *v*, *x*, *y*, *z* *incognitas*. Supposita Numeros *Ciffris* expressos tractandi ratione, primos eorundem Calculos *literales*, quo *Additionem*, *Subtractionem*, *Multiplicationem*, & *Diuisionem* referimus, exponamus.

III. HYPOTHESIS. Signa in Calculis *arithmeticis* vsitata sunt sequentia:

+ (plus) est signum Additionis, e. g. a + b.

— (minus) est signum Subtractionis, e. g. a — b.

× vel . (ductum) est signum Multiplicationis, e. g. a×b vel a.b i. e. *a* ductum in *b* vel *a* multiplicatum per *b*.

: (diuisum) est signum diuisionis, e. g. a:b vel etiam $\frac{a}{b}$ i. e. *a* diuisum per *b*.

= (aequale) est signum aequalitatis, e. g. a=a.

< est signum *inaequalitatis*, ita vt quantitas *a*, cui obuertitur acies huius signi, sit minor quantitate *b*, cui obuertitur adpertura eiusdem, e. g. a<b i. e. *a* est minor, quam *b*.

IV. Definitio. Quantitas *integra* est, cuius Vnitates non intelliguntur diuisae in partes, *fracta* vero, cuius Vnitates intelliguntur diuisae in partes aequales.

V. Definitio. Quantitas *integra*, cui adhaeret *fracta*, dicitur *mixta*, e. g. $a+\frac{b}{c}$. Porro *denominata* (benannte) est, si, de qua re sermo sit, exprimatur, secus *indenominata* audit.

VI. Quanta *contraria* (entgegengesetzte Grösen) sunt Quanta *homogenea* (Artic. I. 1.) ita ad se relata, vt alterum tollat alterum vel ex toto, vel ex parte. E. g. Motus nauis versus *Ortum*, & *Occasum*; item lucrum & damnum &c. — Quantitatum contrariarum alterutra si dicatur *positiua*, erit altera *negatiua*, e. g. si *lucrum* dicatur quantitas *positiua*, erit damnum quantitas *negatiua*, siue lucrum *negatiuum*, & *vicissim*. Similiter si motus versus Orientem dicatur quantitas *positiua*, erit

erit motus versus Occasum quantitas *negatiua*, i. e. *negatiuus motus versus Ortum*, & vicissim. Quantitas *positiua* ergo est alterutra (quam velis) quantitatum sibi *contrarie* oppositarum, & altera tunc est quantitas *negatiua*. Quantitati, quam ex quantitatibus contrarie oppositis lubet dicere *positiuam*, praefigitur signum +, & negatiuae signum —. Vnde quantitatem *positiuam* etiam definiunt illam, *cui praefixum sit signum* +, & *negatiuam* illam, *cui praefixum sit signum* —. Omnis quantitas, cui nullum est praefixum signum, intelligitur habere signum +. E. g. $a + b = + a + b$.

VII. Coroll. 1. Nulla igitur Quantitas de se spectata dici *negatiua* potest; sed omnis est *positiua*. Namque qualibet *quantitate* de se spectata quidquam *ponitur*, videlicet quidquam & augmenti, & decrementi capax. Vt *negatiua* dici possit, referenda est ad aliam *contrarie oppositam positiuam*.

Coroll. 2. Neque Quantitas *negatiua* definiri potest ea, quae *sit minor Nihilo, nisi quatenus ad contrarie oppositam aliam refertur* (nam omnis quantitas *absolute spectata*, est maior Nihilo). Et eodem hoc sub respectu est $-7 < -4$. E. g. si quantitas pecuniae ludo expositae sit = 12 fl., is, qui lucratur 4 fl., plus *nihilo de Summa exposita* accipit, sicque eius reportata quantitas, qua *positiua*, definiri potest maior *nihilo* (nempe *maior nihilo de Summa exposita*). Is, qui non solum *nihil* de Summa exposita lucratur, sed quidquam adeo, e. g. 4 fl. amittit, reportat ex Summa exposita quantitatem *negatiuam* -4, quae recte definitur ea, quae

fit

fit minor *nihilo de Summa expofita.* Vt enim fiat $-4 = 0$ i. e. $=$ *Nihilo de Summa expofita*, adiici quantitati -4 debet quantitas $+4$, eoquod eft $+4 - 4 = 0$. Is tandem, qui amittit 7 florenos, magis adhuc *minus nihilo de Summa expofita* reportat, quam ille, qui amittit tantum 4 florenos, ficque, fi lucrum *primi* dicatur quantitas *pofitiua*, erit damnum reliquorum quantitas *negatiua*, & $-7 < -4$. Per fe autem patet, damnum vtriusque *feorfim* i. e. absque comparatione cum Summa expofita, vel cum *lucro* primi qua *quanto pofitiuo*, fpectatum effe quantitatem, quae fit *maior Nihilo*, adeoque quantitatem *negatiuam*, non poffe definiri illam, quae fit *minor Nihilo*, nifi quatenus referatur ad aliam *contrarie oppofitam pofitiuam*. *)

VIII. Definitio. Quantitates *complexae* (verbundene), vel *polynomiae* (vielnahmige a πολυ *multum* & ονομα *nomen*) funt illae, quae conftant literis, figno $+$ vel $-$ inter fe connexis, e. g. $a + b$ item $a + b - c + d - f$. Literae fic iunctae dicuntur *Termini*, & quantitas complexa *duorum* terminorum dicitur *binomia* (zweynahmige Gröfse), e. g. $a + b$. item $a + bc$, item $a + bcf$. *trium*, *trinomia*, e. g. $a + b - c$, item $ab + bc - cfg$. *quatuor*, *quatrinomia*, e. g. $a + bc - d + f$, reliquae dicuntur a Numero terminorum, quibus conftant, e. g. quantitas complexa *quinque*, vel *fex*, vel *feptem* &c. terminorum. *Incomplexa* autem, vel *monomia* dicitur Quantitas, quae conftat literis, figno $+$ & $-$ inter fe non connexis, e. g. abc item $abcfg$.

IX. Hypothesis. Literae quantitatis *monomiae* intelliguntur inter fe effe multiplicatae. E. g.

---

*) Cl. Lorenz elemente de Mathem. I Th. §. 117.

$abcd = a \times b \times c \times d$. Literae ſingulae dicuntur *factores*, & tota quantitas *monomia* dicitur *Factum* vel *Productum*. Et quia valor literarum non dependet a loco, quem occupant, idem erit factum, quocunque ordine ponantur literae. E. g. $abc = cba = bac$. Concinnius tamen ponuntur iuxta ordinem alphabeti. Porro multiplicatio quantitatum complexarum ſolet ita indicari $(a+-b) \times (c+-f)$ vel $(a+-b)(c+-f)$ item $(a+-b)c$. diuiſio autem ita $(a+-b):(c+-f)$ vel frequentius ita $\frac{a+-b}{c+-f}$.

X. Hypothesis. *Ciffrae* quantitatibus literalibus tripliciter iungi poſſunt.

1) Per ſignum + & —, e. g. $a+-3$ item $ab-4$, & tunc numeri *ciffris* expreſſi ſunt vel addendi quantitatibus literalibus, vel ab illis ſubtrahendi aut viciſſim.

2) *Ciffrae* poni poſſunt ante quantitates literales non interiecto ſigno + vel —, e. g. $2a$, & tunc dicuntur *coefficientes* quantitatis literalis, indicantque, quantitatem literalem eſſe multiplicatam per illas ciffras, e. g. $2a = 2 \times a$. $3abc = 3 \times abc = 3 \times a \times b \times c$ poſito $a = 4$, erit $2a = 8$. & poſito $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, erit $3abc = 3 \times 4 \times 3 \times 5 = 180$. Quantitas, quae nullum *coefficientem* ſibi praefixum habet, intelligitur habere *coefficientem* 1, quia 1 eſt factor communis omnium quantitatum. Subinde etiam *literae* ſunt coefficientes aliarum, e. g. ſi quantitas, de qua ſermo eſt, ſit $= b$, erit, ſi detur quantitas ab, litera a coefficiens quantitatis b.

3)

3) Ciffrae positae ad dextram *supra* literas, dicuntur *exponentes* earundem quantitatum literalium, atque indicant, literas illas esse toties iuxta se absque interiecto signo + & — positas i. e. secum ipsis multiplicatas, quoties Vnitas continetur in *exponente*, e. g. est $a^3 = aaa = a \times a \times a$ (IX) igitur posito $a = 4$, erit $a^3 = a \times a \times a = 4 \times 4 \times 4 = 64$. item $3a^3 b^4 = 3 \times aaa \times bbb = 3 \times a \times a \times a \times b \times b \times b$; vnde posito $a = 2$ & $b = 3$, erit $3a^3 b^4 = 1944$. Si nullus adscriptus sit exponens, intelligitur exponens 1. e. g. $3c = 3c^1$. *Literae* etiam vices exponentium subeunt saepissime, vt calculus reddatur vniuersalis. e. g. a^m, vel a^{n-1} item a^{n+1} b^{m-1} &c. atque hic litera toties intelligitur iuxta se multiplicatione posita, quoties in exponente *literali* Vnitas continetur. e. g. sit $a = 2$ $n = 3$, erit $a^{n-1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$.

XI. Quantitates *literales* dicuntur *homogenae* (eiusdem speciei), quae *constant iisdem literis cum iisdem exponentibus*. Secus, si vel literae sunt diuersae, vel eaedem quidem, sed tamen diuersos habent exponentes, sunt *heterogeneae* (diuersae speciei). E. g. a^3 & $-3a^3$ sunt quantitates *homogeneae*. Ast c^3 & $3c^2$ sunt *heterogeneae*, item c^3 & f^3. His praenotatis ad ipsos quantitatum literalium *primos Calculos* progrediamur.

I.

I.

Reductio & Additio.

XII. Definitio. Quantitatem literalem *reducere* est inuenire aliam, datae aequalem, sed paucioribus Terminis constantem.

XIII. Problema. Quantitates *reducere*.

Resolutio. Seruentur sequentes regulae:

1) Videatur, num in data quantitate occurrant Termini *homogenei* (XI). Si omnes sunt *heterogenei*, Reductioni non est locus.

2) Si adsint Termini homogenei, attendatur ad signa. Si sint *eadem*, coefficientes addantur, & quantitas semel ponatur retento signo eodem. E. g. $3a^3b + 4a^3b = 7a^3b$. item $-2ab + 3a^3b -4ab + 9a^3b = -6ab + 12a^3b$.

3) Si vero signa sint diuersa, coefficiens minor subtrahatur a maiore, & quantitas semel ponatur post differentiam coefficientium, cum signo, quod coefficienti maiori est praefixum. E. g. $-7a^3b^4 + 5a^3b^4 - 3c^3 + 2c^3 - 7 + 9 = -2a^3b^4 - c^3 + 2$. Demonstratio patet ex definitione Reductionis (XII).

XIV. Definitio. *Addere* duas, pluresue quantitates est inuenire aliam, quae illis pluribus sit aequalis — & haec *Summa* vocatur. *Additio* ergo est inuentio *Summae*.

XV. Problema. Quantitates datas addere.

Re-

Resolutio. *Reducantur* quantitates addendae (XIII), & erit facta additio. Sint e. g.

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2$$
$$4a^3 - 2a^2b - 3ab^2$$

quantitates addendae. Spectentur ceu in una serie positae $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 4a^3 - 2a^2b - 3ab^2$ & facta *Reductione* habetur *Summa* $= 5a^3 + a^2b$. Demonstratio est ipsa rursus Definitio (XIV).

II.
Subtractio.

XVI. Definitio. Subtrahere quantum *B* a quanto maiore *A* est inuenire aliud quantum *D*, quod indicet, quanto maior sit quantitas *A* quantitate *B:* Quantum *B* dicitur *subtrahendum*, *A minuendum*, & *D differentia.* Subtractio ergo est *inuentio differentiae, quae inter duo Quanta intercedit.*

XVII. Corollarium. Ergo legitime peracta est Subtractio, si est inuenta legitima *differentia.* Est autem

XVIII. Definitio. Differentia *legitima*, si addita quanto subtrahendo restituit quantum minuendum, vi axiomatis: „Si partes ex Toto subductae residuis adduntur, restituitur Totum."

XIX. Problema. Quantitates datas e datis subtrahere.

Resolutio. Quantitatis subtrahendae signa mutentur in contraria, & dein addatur quantitati minuendae.

E. g.

E. g. esto quantitas minuenda $= 3a^3 - 3a^2b + b^3$
subtrahenda $= -4a^3 + 2a^2b - b^3$
mutentur signa subtrahendae $= + \quad - \quad +$

Differentia erit $= 7a^3 - 5a^2b + 2b^3$.

Item erit $4a^3 - b + 3ab^2 + 2ab^3 - c$
$2a^3 + 7b - 2ab^2 + 5ab^3 - 8c$
$- \quad - \quad + \quad - \quad +$

Differentia $= 2a^3 - 8b + 5ab^2 - 3ab^3 + 7c$.

Demonst. Legitima iuxta hanc praescriptam methodum inuenitur differentia datarum quantitatum, ergo Subtractio, iuxta methodum praescriptam peracta, est legitima (XVII. XVIII). Legitimam autem *differentiam* iuxta praescriptam methodum inueniri ita ostenditur: Quaelibet quantitas minuenda potest vocari $= A$ & quaelibet subtrahenda $= B - C$: quodsi iam $B - C$ ab A subtrahitur iuxta methodum praescriptam, erit differentia $= A - B + C$. Quodsi iam haec addatur quanto subtrahendo $B - C$, prouenit rursus Quantum minuendum $= A$,

Ergo *differentia* iuxta praescriptam methodum inuenta est *legitima*, adeoque est *legitime* subtractum (XVII).

XX. Coroll. Igitur si a Numero 12 sit subtrahendus Numerus 8, differentia erit $12 - 8 = 4$ & si a 12 sit subtrahendus Numerus -8, differentia erit $= 12 + 8 = 20$, & si a 12 sit subtrahendus Numerus 17, differentia erit $= 12 - 17 = -5$.

III.

III.

Multiplicatio.

XXI. DEFINITIO. *Multiplicare* quantum *A* (*Multiplicandus*) per quantum *B* (*Multiplicator*) est, toties & ita sibi addere quantum *A*, *quoties* & *quomodo* Vnitas continetur in quanto *B*. Quantum, quod prouenit, vocatur *Factum* vel *Productum*, *Multiplicandus* autem & *Multiplicator* dicuntur *Factores*. Multiplicatio ergo est inuentio *Facti*.

XXII. COROLL. I. Multiplicatio est repetita additio, *Multiplicandi* nempe ad se toties facta, quoties Vnitas continetur in Multiplicatore.

COROLL. 2. *Factum* toties continet Multiplicandum, quoties Vnitas est in Multiplicatore. Viciffim *Factum* toties continet *Multiplicatorem*, quoties Vnitas continetur in *Multiplicando*. Hinc idem prouenit Factum, vterlibet Factorum spectetur ceu *Multiplicandus*, vel ceu *Multiplicator*.

COROLL. 3. Multiplicator femper est numerus *non denominatus*. Multiplicandus autem potest esse numerus *denominatus* (Art. II. V).

XXIII. PROBLEMA. *Quantitates literales multiplicare.*

Resolutio. REGVLA I. Si Factores fint quantitates *heterogeneae* (XI), iungantur fibi absque figno. e. g. $a^2b^2 \times c^3d^4 = a^2b^2c^3d^4$. item $abc \times df = abcdf$. (IX).

RE-

Regvla II. Eadem Factorum signa in facto dant $+$, diuersa dant $-$. E. g. $+a \times +b = +ab$ item $-a \times -b = +ab$. Sed $-a \times +b = -ab$.

Demonstratio. Multiplicare quantum $+a$ per quantum $+b$ idem est, ac quantum *a toties* & *ita* sibi addere, *quoties* & *quomodo* Vnitas in quanto *b* continetur. Sed Vnitas in b continetur b*esies*, ergo & *a* est b*esies* sibi addendum, i. e. debet in facto poni *ab*. Porro Vnitas in *b* continetur *positiue*; ergo & *a* debet b*esies positiue* poni, adeoque factum debet esse $= +ab$. i. e. $+$ & $+$ in facto dant $+$. Sic similiter demonstratur $-$ & $-$ in facto dare $+$. Namque $-a$ multiplicare per $-b$ est quantum $-a$ toties & ita sibi addere, *quoties* & *quomodo* Vnitas continetur in $-b$. Sed Vnitas in $-b$ continetur b*esies negatiue*, ergo & $-a$ in facto debet b*esies negatiue* poni. Sed $-a$ b*esies negatiue* positum dat $+ab$; namque quantum *negatiuum* $-a$ *negatiue* ponere, idem est, ac *Negationem Negationis* ponere, id est, illud *positiue* ponere. Ergo $-$ & $-$ in facto dant $+$ *).

Tandem est $a \times -b = -ab$. namque *a* ponendum in facto est b*esies negatiue*, ergo factum debet esse $-ab$. Similiter est $-a \times b = -ab$; nam $-a$ debet in facto poni b*esies positiue*. Sed quantitatem negatiuam $-a$ *positiue* ponere, idem est, ac illam, qua *negatiuam* ponere. *Negatiuam* enim *negatiue* ponere, est illam mutare in *positiuam*: ergo

*) Noli tamen exinde concludere „*debita multiplicata debitis dare opes positiuas*.“ Hoc enim absurdum esse patet ex XXII. Coroll. 3.

ergo *negatiuam* quantitatem *positiue* (i. e. non *negatiue*) ponere, idem est, ac illam non mutare in *contrariam positiuam*, sed illam, ceu *negatiuam* ponere: ergo debet esse $-a \times b = -ab$. Idem patet ex eo, quia est $-a \times b = b \times -a$ (XXII. Corollar. 2.) sed esse $b \times -a = -ab$ demonstratum est, ergo etiam est $-a \times b = -ab$.

Regula III. Coefficientes etiam inter se multiplicentur; e. g. $3c \times 4d = 12cd$. Namque posito $3 = a$ & $4 = b$, erit $3c \times 4d = ac \times bd = abcd$ (IX) $= a \times b \times c \times d$ (IX) $= 3 \times 4 \times c \times d = 12cd$. Idem ex natura rei (XXI) facile patet.

Regula IV. Si in vtroque factore occurrat eadem litera, cum eodem vel diuerso Exponente, litera communis in facto semel ponatur cum Exponente, qui sit Summa exponentium, quos habent factores. V. g. $a^3 \times a^4 = a^7$ generaliter $a^m \times a^n = a^{m+n}$. Namque est $a^3 \times a^4 = aaa \times aaaa$ (X. 3) $= a^7$ (ibidem). Similiter est $a^{m+n} = a^m \times a^n$ id quod ex dictis supra (X. 3) intelligitur. Est ergo $3a^3 b^2 \times -4a^n b^m = -12a^{3+n} b^{m+2}$ & $-4ab^{n-1} \times 2a^{n-1} b^{n-1} = -8a^{n-1+1} b^{n-1+n-1} = -8a^n b^{2n-2}$.

Regula V. Si factores sunt quantitates *complexae*, singuli Termini vnius ducantur in singulos alterius, & facta colligantur in *Summam*. E. g. si sint factores $a^2 + 2ab + b^2$

$$a + b$$

fiat $a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (XIII).

item

item si sint factores $-3a^{n-1}+4a^2b^m-c^{n-1}$

$$4a \quad -3a^2b^m-3c^{n-1}$$

erit factum =

$$-12a^n+16a^3b^m-4ac^{n-1}+9a^{n+1}b^m$$
$$-12a^4b^{2m}+9a^{n-1}c^{n-1}-9a^2b^mc^{n-1}+3c^{2n-2}$$

Demonst. Multiplicandus quilibet complexus a+b+c &c. potest vocari = A, & quilibet complexus Multiplicator = B (=d+f+g &c.). Factum ex Multiplicatione vtriusque resultans est = *AB* (XXIII. Reg. 1), i. e. Quantitas *A* est toties & ita sibi addita (siue *Termini* a+b+c &c. quibus quantitas *A*, ex hypothesi *complexa* constat, sunt toties & ita sibi additi), quoties & quomodo Vnitas continetur in Multiplicatore *B* (XXI) = d+f+g &c. Sed Vnitas in *B* continetur (d+f+g &c.) *esies*, ergo & Quantitas a+b+c &c. (=A) est sibi (d+f+g &c.) *esies* addenda. Igitur singuli Termini Multiplicandi a+b+c &c. sunt multiplicandi per singulos Terminos Multiplicatoris d+f+g &c.

IV.

Diuisio.

XXIV. Definitio. Quantitatem *A* diuidere per quantitatem *B* idem est, ac quantitatem *B* (diuisorem) toties subtrahere a quantitate *A* (diuidendo), quoties fieri potest, debetque, vt ex *A* nihil sit residui. Quantitas indicans, *quoties* haec subtractio facta sit, vocatur *Quotus*, vel *quotiens*. Inuentio *quoti* est *diuisio*.

XXV. Coroll. 1. Diuiſio eſt repetita ſubtractio diuiſoris a diuidendo.

Coroll. 2. Quoties diuiſor ſubtrahitur a diuidendo, toties ponitur in quoto *Vnitas.* Igitur *diuiſor continetur toties in diuidendo, quoties eſt Vnitas in quoto.*

Coroll. 3. Igitur diuiſor ſibi toties additus, quoties *Vnitas* eſt in *quoto*, vel *quotus* ſibi toties additus, quoties Vnitas continetur in *diuiſore*, eſt aequalis diuidendo — ſiue *quotus ductus in diuiſorem reſtituit diuidendum.*

Coroll. 4. Legitime *diuiſum* eſt, ſi eſt inuentus *legitimus quotus;* quotus autem eſt legitimus, ſi ductus in diuiſorem reſtituit diuidendum (praeced.): ergo ſi quotus ductus in diuiſorem reſtituit diuidendum, legitime peracta eſt diuiſio.

Coroll. 5. Factum quodlibet poteſt vocari $BQ = A$. Iam ſi A diuidatur per B, prouenit Q, & ſi diuidatur per Q, prouenit quotus B (XXV. 3). Igitur *facto A diuiſo per alterutrum factorem, factor alter eſt Quotus.*

Coroll. 6. Quotus ex diuidendo eodem modo oritur, quo Vnitas in diuiſore continetur — & viciſſim quoties & quomodo diuiſor continetur in diuidendo, toties & ita continetur Vnitas in Quoto. Vnde *Diuiſio* generaliter etiam definitur *Inuentio Quoti, qui toties & ita continet Vnitatem, quoties & quomodo Diuiſor continetur in Diuidendo.* Atque haec *Definitio* non ſolum comprehendit diui-

diuisionem numeri *maioris* per *minorem*, sed & *minoris* per *maiorem*. E. g. Numerus 2 diuisus per 5 dat quotum $= \frac{2}{5}$ i. e. duas partes quintas Vnitatis, signo, diuisorem 5 non *integrum*, sed eius tantum duas partes quintas contineri in diuidendo 2. Porro fluit ex hac definitione Diuisionis,

Coroll. 7. Eadem Diuidendi & Diuisoris signa in Quoto dare +, diuersa autem dare —, e. g. $\frac{+6}{+2} = +3$ & $\frac{-6}{-2} = +3$ & $\frac{-6}{2} = -3$ item $\frac{6}{-2} = -3$.

Inprimis + & + dant in quoto +. Nam in quoto Vnitas toties & *ita* continetur, quoties & *quomodo* diuisor continetur in diuidendo (praeced.). Sed Diuisor *positiuus* in Diuidendo *positiuo* continetur *positiue*, ergo & Vnitas in Quoto *positiue* contineatur, i. e. Quoto signum + conueniat, necesse est.

Dein — & — dant in quoto +. Nam *quomodo* diuisor *(negatiuus)* continetur in diuidendo *(negatiuo)*, *ita* Vnitas continetur in quoto. Sed Diuisor *negatiuus* in Diuidendo *negatiuo* continetur *positiue*. Nam si *negatiue* in illo contineri diceretur, hoc idem foret, ac si diceretur, *Negationem negatiui* Diuisoris contineri in *negatiuo* Diuidendo: sed *Negatiuum negatiuae* quantitatis est *contraria* quantitas *positiua*, quae citra absurdum dici nequit contineri in quantitate *negatiua* (id quod ex definitione quantitatis *positiuae*, & *negatiuae*, superius (VI) data liquet): ergo Diuisor *negatiuus* in Diuidendo

C nega-

negatiuo continetur *positiue*, ergo & *Vnitas in* Quoto *positiue* contineatur, i. e. Quotus ipse *positiuus* sit, necesse est, adeoque — & — dant in Quoto +.

Tandem — & + dant in Quoto —. Quodsi enim *Diuisor* est *negatiuus*, & *Diuidendus positiuus*, tunc *Vnitas* in Quoto *eodem modo* continetur, quo *Diuisor* in *Diuidendo* (praeced.). Sed Diuisor *negatiuus* in Diuidendo *positiuo negatiue* continetur, i. e. *Negatiuum negatiui* Diuisoris, siue Diuisor *positiue* sumtus continetur in Diuidendo *positiuo* (id quod ex Conceptibus ipsis quantitatis *positiuae* & *negatiuae* planum est), ergo & Vnitas in Quoto *negatiue* continetur, i. e. Quotus debet esse *negatiuus*. Quodsi vero Diuidendus est *negatiuus*, & Diuisor *positiuus*, tunc Quotus rursus est *negatiuus*, atque ad hoc ex natura Diuisionis demonstrandum ita est concludendum: in *Quoto* Vnitas *eodem modo* continetur, quo Diuisor in Diuidendo (praeced.). Sed Diuisor *positiuus* in Diuidendo *negatiuo negatiue* continetur, i. e. *Negatiuum positiui* Diuisoris, siue Diuisor *negatiue* sumtus continetur in Diuidendo *positiuo*, id quod rursus planum est ex definitione quantitatis *positiuae* & *negatiuae* (VI), ergo & Vnitas in Quoto continetur *negatiue*, siue Quotus debet habere signum —. *)

XXVI. Definitio. Quantitas $= B$, quae *aliquoties* sibi addita est $=$ quantitati A, dicitur pars *aliquota* quantitatis A, & quantum A est *multiplum* (ein Vielfaches) quanti B.

XXVII.

*) Cl. Lorenz l. c. §. 134. Coll. §. 25—32.

XXVII. COROLL. 1. Quilibet ergo Numerus est *multiplum* Vnitatis, & Vnitas est pars *aliquota* cuiusque Numeri.

COROLL. 2. Diuisor & Quotus singuli sunt pars *aliquota* Diuidendi, & Diuidendus est illorum *multiplum* — vel *duplum*, vel *triplum*, vel *quadruplum* — generatim *ntuplum* (XXV. Coroll. 3).

XXVIII. Quantitates *aequemultiplae* (Gleichvielfaches) sunt illae, quae spectantur ceu ortae ex multiplicatione duarum vel *plurium* aliarum quantitatum per eandem tertiam. Illae ipsae autem duae, pluresue aliae quantitates, quae per eandem tertiam multiplicatae dant quanta *aeque multipla*, sunt *simplae* respectu quantorum *aeque multiplorum*. E. g. Quantitates *am* & *bm* sunt *aeque multiplae* respectu quantitatum *a* & *b*, quae *simplae* respectu illarum dicuntur. Sub diuerso igitur respectu duae, pluresue quantitates dici possunt *aeque multiplae* & *simplae*. e. g. *abx* & *cdx* sunt aeque multiplae respectu quantitatum *ab* & *cb*; quodsi iam *abx* & *cdx* multiplicentur rursus per tertiam *y*, erunt *abxy* & *cdxy* *aeque multipla* quantorum *abx* & *cdx* & haec respectu priorum dicuntur *simpla*. Sed respectu quantitatum *ab* & *cd* sunt *abx* & *cdx* *aeque multipla*, & illae *simpla*.

XXIX. DEFINITIO. Quantitas, quae aliam *adcurate* i. e. sine residuo diuidit, dicitur hanc aliam *metiri*. Quantitas, quae duas, aut plures alias quantitates *metitur*, dicitur *mensura communis* harum quantitatum, & *mensura communis maxima* duarum, aut plurium quantitatum est diuisor

 ea-

earundem *communis maximus*, e. g. Numerorum 18, 36, 54 &c. mensura communis maxima est Numerus 18.

XXX. Problema. *Quantitates literales diuidere.*

Resolutio. Dispiciatur

Regvla I. Num Diuidendus & Diuisor sint quantitates *incomplexae*, an *complexae*. A) Si sint *incomplexae*, dispiciatur,

Regvla II. An *diuersis* literis constent, an *iisdem*. Si *diuersis*,

Regvla III. Diuisio solet tantum indicari. E. g. si sit quantitas ab diuidenda per cd, quotus est $= \frac{ab}{cd}$ (ex hypothesi). Item si sit $-c$ diuidendum per $3b$, quotus est $= \frac{-c}{3b}$. Quodsi vero diuidendus, & diuisor *incomplexi* constent *iisdem* literis, videatur, an hae *eaedem* literae habeant *eundem* exponentem, an *diuersum*. Si *illud*,

Regvla IV. Litera eadem *vel* omittatur, & quod relinquitur, est quotus, *vel* litera eadem in quoto semel ponatur cum exponente, qui sit aequalis differentiae, quae prouenit, dum *Exponens diuisoris* subtrahitur *ab illo diuidendi*, E. g. est $\frac{a^m}{a^m} = \frac{1a^m}{1a^m} = \frac{1}{1} = 1$ item $= a^{m-m} = a^0$. Nam vterque quotus est eiusmodi, vt ductus in diuisorem

a^m restituat diuidendum a^m (XXV. 4). Vnde liquet, *quantitatem quamcunque exponentis* $= 0$ *esse aequalem Vnitati.* Nam quantitates a^0 & 1 sunt ex demonstratis aequales vni tertiae $\frac{a^m}{a^m}$, ergo sunt aequales inter se. Ergo generaliter est $a^0 = 1$. Pariter est $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$, atque hoc ita demonstratur *) Esto $\frac{b}{c} = q$, ergo erit $b = cq$ (XXV. 3) hinc erit per substitutionem $\frac{ab}{ac} = \frac{acq}{ac} = q$. (Nam quotus *q* ductus in diuisorem *ac* est $=$ diuidendo acq). Est vero etiam $\frac{b}{c} = \frac{cq}{c} = q$. Hinc, quae sunt aequalia vni tertio *q*, sunt aequalia inter se, ergo est $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$. Vnde liquet, diuidendum *b* & diuisorem *c* simplos eundem quotum dare, quem dant eorundem aeque multipli *ab* & *ac*. Nam est ex demonstratis, posito, esse $\frac{b}{c} = q$, etiam $\frac{ab}{ac} = q$. Sed $\frac{b}{c}$ sunt *simpla*, & $\frac{ab}{ac}$ *aeque multipla* (XXVIII),

ergo

*) Vbi quotus est fractio, non adhibemus demonstrationem „Quotus ductus in Diuisorem restituit Diuidendum" eoquod, vbi de diuisione quantitatum *integrarum* sermo est, necdum audiuimus, quomodo diuisor *fractus* multiplicandus sit per diuisorem *integrum*.

ergo. Pariter est $\frac{a}{ac} = \frac{1}{c}$. item $\frac{ax^2}{3bx^2} = \frac{a}{3b}$.

Quodsi autem *eaedem* literae sint *diuersi* Exponentis,

REGVLA V. Litera eadem *vel* semel ponatur in quoto, & exponens diuisoris subtrahatur ab exponente diuidendi, ita, vt residuum sit exponens quoti: *vel*, si fieri potest; quantitates eiusdem literae resoluantur in factores, ita, vt tam in diuidendo, quam diuisore proueniant eaedem literae cum eodem exponente, & tunc, hisce deletis, quod relinquitur, est quotus. E. g. est iuxta Regulae huius Casum primum $\frac{ax^2}{x} = ax^{2-1} = ax$. item $\frac{x^m}{-x^n} = -x^{m-n}$. *Nam quotus ductus in diuisorem restituit diuidendum* x^m (XXV. Coroll. 4 & 7). Vbi notandum, *in omni diuisionis casu etiam coefficientes diuidendos esse*, id quod tum ex natura diuisionis, tum ex eo liquet, quia quotus hoc modo obtentus semper est eiusmodi, vt ductus in diuisorem restituat diuidendum. E. g. est $\frac{6ax^m}{-3x} = -2ax^{m-1}$. item $\frac{-25x^3}{5x} = -5x^2$. iuxta casum alterum vero Regulae huius Vtae est e. g. $\frac{ab^m}{b^{2m}} = \frac{ab^m}{b^m \times b^m} = \frac{a}{b^m}$ (XXX. Reg. 4). item $\frac{b^{2m}}{ab^m} = \frac{b^m \times b^m}{a \times b^m} = \frac{b^m}{a}$. Vnde quia iuxta Regulae

huius

huius Vtae Casum primum est $\frac{ab^m}{b^{2m}} = a\,b^{m-2m} = ab^{-m}$, & iuxta eiusdem Regulae Casum secundum est etiam $\frac{ab^m}{b^{2m}} = \frac{a}{b^m}$, consequitur, vt sit $ab^{-m} = \frac{a}{b^m}$. i. e. *quantitas exponentis negatiui* ab^{-m} est = *suo coefficienti* a *diuiso per eandem quantitatem, sed exponentis positiui.* Hinc $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

B) *Si vero Diuidendus & Diuisor sint complexi,* videatur,

Regvla VI. *num in singulis Terminis tam Diuidendi, quam Diuisoris* occurrat *eadem* litera, *nec ne.* Si eadem litera in singulis Terminis tam Diuidendi, quam Diuisoris habeatur,

Regvla VII. *Singuli Termini diuidantur per hanc literam communem minimi Exponentis, & quod prouenit, est quotus.* E. g. est $\frac{abx + cx}{dx + fx^2} = \frac{ab + c}{d + fx}$. *Nam diuidendus & diuisor simpli* $\left(\frac{ab + c}{d + fx}\right)$ *eundem quotum praebent, quem eorum aeque multipli* $\frac{abx + cx}{dx + fx^2}$ (XXX. Reg. IV). Pariter est $\frac{x^4 + x^3}{x^2 + x^4} = \frac{x^2 + x}{1 + x^2}$, & $\frac{ax + 2abx}{ax + ax^2} = \frac{1 + 2b}{1 + x}$. item

est

est $\frac{3x^2}{3ax^2+3b^2x^2} = \frac{1}{a+b^2}$. item $\frac{x^2-x}{-x} = -x+1$.

Similiter est $\frac{4abx^2-2ab}{2a^2b^2+4ab^2} = \frac{2x^2-1}{ab+2b}$ &

$\frac{4a^2x^2+3a^3b^2x}{a^2x-a^2bx} = \frac{4x+3ab^2}{1-b}$. *Quodsi vero eadem litera non occurrit in singulis Terminis tam Diuidendi, quam Diuisoris,* adsumatur

Regvla VIII. Terminus Diuisoris quicunque, & per eum diuidatur Terminus Diuidendi, in quo adsumtus Diuisoris terminus continetur. Quotus inuentus multiplicetur per totum Diuisorem; Factum subtrahatur a Diuidendo; & eodem Termino Diuisoris, prius adsumto repetatur in residuo Diuidendi Diuisio, donec nihil remanserit. E. g. esto Diuidendus $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, & Diuisor sit $= a+b$, scribantur ambo, & fiat illius per hunc diuisio, vt sequens Schema exhibet.

Diuid. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	diuisor $a+b$
a^3+a^2b	quotus $a^2+2ab+b^2$
$-\ \ -$	
$0 \ \ +2a^2b+3ab^2+b^3$	
$2a^2b+2ab^2$	
$-\ \ -$	
$0 \ \ +ab^2+b^3$	
ab^2+b^3	
$-\ \ -$	
0	

Quotus ergo est $a^2+2ab+b^2$. & hunc esse legitimum,

timum, patet ex eo, *quia ductus in Diuisorem restituit Diuidendum.* Eodem modo procedatur in diuisionibus aliis, huc pertinentibus. Si plures Termini reperiantur esse residui, diuisio tantum indicetur. E. g. $\frac{6a^2 - 3ac - 2bd}{3a - d}$.

Exempla quaedam Diuisionis iuxta Reg. VIII.

I Diuisionis $\frac{-x^4 + 251x - 210}{x - 6}$ quotus est $= -x^3 - 6x^2 - 36x + 35$.

II. Pariter est

$$\frac{x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 214x^2 - 9785x + 20394}{x^2 - 2x - 99} = x^3 - 2x^2 + 103x - 206.$$

$$\text{III. } \frac{x^5 + 198x^2 - 10609x + 20394}{x^2 + 2x - 99} = x^3 - 2x^2 + 103x - 206$$

$$\text{IV. } \frac{x^5 + z^5}{x + z} = x^4 - x^3z + x^2z^2 - xz^3 + z^4$$

$$\text{V. } \frac{a^4 - b^4}{a - b} = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

VI. $\frac{1}{1+x}$ est

$$vel = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots + x^{2n} - \frac{x^{2n+1}}{1+x}$$

$$vel = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots + x^{2n} - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1+x}.$$

prout nempe Numerus Terminorum quoti vel

impar, *vel par* quaeritur. Ibi patet 1) literam *x* in omnibus Terminis quoti occurrere, excepto primo 1, pro quo tamen poni etiam potest x^0 (nam 1 est $= x^0$ (XXX. Reg. IV)). 2) Terminum *x* esse *positiuum*, si eius exponens sit Numerus *par*, secus *negatiuum*. 3) Exponentem termini *x* esse Numerum *parem*, si Numerus Terminorum Quoti *impar* sumatur, secus *imparem*. Vnde si tandem, vt finiatur diuisio, pro residuo in diuisione sumatur Terminus *x* positiuus, cum exponente $= 2n$, qui est Numerus *par*, habebitur Terminus quoti $+x^{2n}$, & Numerus Terminorum quoti $1 - x + x^2 - x^3 \ldots + x^{2n}$ erit *impar*. Quodsi iam $+x^{2n}$ ducatur in diuisorem $1+x$, & factum $x^{2n} + x^{2n+1}$ subtrahatur e residuo $+x^{2n}$, erit nouum residuum $= -x^{2n+1}$. Hoc si adiiciatur quoto, & diuisor $1+x$ illi subscribatur, habebitur verus quotus $1 - x + x^2 \ldots + x^{2n} - \frac{x^{2n+1}}{1+x}$ pro Numero Terminorum quoti *impari*.

Inde intelligitur origo quoti alterius supra positi pro Numero Terminorum quoti *pari*. Cum enim quoti $1 - x + x^2 - x^3 \ldots + x^{2n}$ Numerus Terminorum sit *impar*, ergo, vt fiat *par*, adiici illi debet nouus terminus, ex diuisione residui $-x^{2n+1}$ per 1 ortus, scilicet terminus $-x^{2n+1}$ erit ergo iam Numerus Terminorum Quoti $1 - x + x^2 - x^3 \ldots + x^{2n} - x^{2n+1}$ Numerus *par*. Quodsi iam $-x^{2n+1}$ ducatur denuo in $1+x$, & factum $-x^{2n+1} - x^{2n+2}$ subtrahatur e residuo $-x^{2n+1}$, relinquitur $+x^{2n+2}$, adeoque, si hoc adiiciatur quoto, subscripto diuisore $1+x$, habebitur

bitur quotus supra positus pro Numero *pari* Terminorum. Posito iam $x = 1$, erit semper $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. adeoque Paradoxon creationis ex Nihilo, quod GVIDO GRANDI in hoc Exemplo reperisse sibi visus est, suopte euanescit.*)

CAPVT II.

PRIMI CALCVLI LITERALES QVANTITATVM FRACTARVM.

XXXI. DEFINITIO. Quantitas dicitur *fracta*, cuius Vnitates intelliguntur diuisae in partes aequales, & si harum aliquot tantum accipiuntur, fractio ipsa est *propria*. E. g. diuisa intelligatur *Vnitas*, de qua sermo est, in partes aequales d, & earum aliquot tantum, e. g. n accipiantur, fractio erit *propria*, & ita exprimitur $\frac{n}{d}$. inferior quantitas d dicitur *denominator*, seu *denominans*, in quot partes aequales Vnitas sit diuisa; Superior autem n est *numerator*, seu *numerans*; quot illarum aequalium partium d accipiantur. Fractio *impropria* est, cuius numerator est vel *aequalis* denominatori, vel *maior* illo. E. g. $\frac{a}{a}$ item $\frac{bcd}{bcd}$ item $\frac{ab}{a}$.

XXXII. COROLLARIVM. Fractio *propria* est minor Vnitate. Impropria autem est vel aequalis Vnitati, vel maior ea, prout numerator est vel = denominatori, vel illo maior: fractiones, quarum numerator est = denominatori, sunt sibi aequa-

*) Cl. KAESTNERI Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen. 2te Auflage. §. 13.

aequales $\frac{a}{a} = \frac{bc}{bc} \frac{fkm}{fkm}$. Singulae enim sunt = 1.

XXXIII. Definitio. *Cognomines* dicuntur fractiones, quarum idem est Denominator, e. g. $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}, \frac{f}{b}$. Fractionum *cognominum* ea maior est, cuius numerator est maior. Vnitas enim est (quia sunt ex hypothesi fractiones *cognomines*), diuisa in partes aeque magnas; refert ergo tantum scire, vbi plures eiusmodi partes accipiantur. Sed quot accipiantur, indicat *numerator*; ergo, quo maior est numerator earum, eo maiores ipsae sunt. Si vero denominatores sint diuersi, sed numeratores iidem, facile patet, illam esse maximam, cuius denominator fuerit minimus. Tandem si tam *Numeratores*, quam *Denominatores* sint diuersi, vt intelligatur, quaenam fractionum datarum sit maxima, *reducantur* ad idem *Nomen*, i. e. *mutentur in alias fractiones, quoad valorem illis aequales, sed tamen eundem Denominatorem habentes.*

XXXIV. Problema. *Fractiones reducere ad idem Nomen.*

Resolutio. Numerator fractionis cuiusque multiplicetur per Denominatores reliquarum, non autem per Denominatorem suum proprium. Haec facta fiant noui Numeratores, quibus subscribatur idem Denominator, resultans ex multiplicatione omnium Denominatorum datorum inter se. E. g. est $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{f}{g} = \frac{adg, cbg, fbd}{bdg}$

De-

Demonstratio. Simpla eundem quotum praebent, quem eorundem aeque multipla (XXX, Regul. IV.). ergo est $\frac{adg}{bdg} = \frac{a}{b}$ & $\frac{cbg}{bdg} = \frac{c}{d}$ & $\frac{fbd}{bdg} = \frac{f}{g}$.

XXXV. PROBLEMA. Mutare quantitatem integram *a*, in fractionem dati Nominis *b*.

Resolutio: Multiplicetur *a* per datum denominatorem *b* & factum diuidatur per *b*, erit $a = \frac{ab}{b}$ (ibid.).

XXXVI. PROBLEMA. Fractiones datas addere.

Resolutio. Si fractiones datae non sunt eiusdem Denominatoris, reducantur ad idem Nomen, & addantur soli Numeratores, retento communi Denominatore. e. g. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$.

Demonstratio intelligitur ex natura rei ipsa.

XXXVII. PROBLEMA. *Fractiones datas e datis subtrahere.*

Resolutio. REGVLA I. Si fractio subtrahenda est e fractione, reducantur ambae ad idem Nomen, si non sunt cognomines, & tunc Numeratores soli ab inuicem subtrahantur, manente communi Denominatore. E. g. $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

REGVLA

Regvla II. Si fractio est subtrahenda ex integro, cui adhaeret fractio, integer cum fractione sibi adhaerente, & fractio subtrahenda mutentur in fractionem eiusdem Nominis, & tunc subtractio fiat in solis Numeratoribus. E. g. est $a + \frac{b}{d} - \frac{c}{f} = \frac{ad+b}{d} - \frac{c}{f} = \frac{adf+bf-cd}{df}$.

Regvla III. Si fractio est subtrahenda ex *integro*, integer mutetur in fractionem cognominem subtrahendae, & fiat subtractio iuxta Reg. I. e. g. est $a - \frac{c}{f} = \frac{af-c}{f}$. Atque harum Regularum veritas rursus ex definitione subtractionis fractionum suopte intelligitur.

XXXVIII. Problema. Fractiones multiplicare.

Resolutio. Regvla I. Si fractio multiplicanda est per integrum, vel viciſſim, solus Nominator multiplicetur per integrum, manente Denominatore. e. g. $a \times \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$ item $\frac{b}{c} \times a = \frac{ab}{c}$.

Demonſt. Esto $\frac{b}{c} = q$, erit $b = cq$; hinc $a \times \frac{b}{c} = a \times q = aq$ & $\frac{ab}{c} = \frac{acq}{c} = aq$, ergo aequalia vni tertio *aq*, sunt aequalia inter se, hinc $a \times \frac{b}{c}$, vel $\frac{b}{c} \times a = \frac{ab}{c}$.

De-

REGVLA II. Si fractio est multiplicanda per fractionem, multiplicentur tam Numeratores inter se, quam Denominatores. E. g. est $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

Demonstratio, Esto $\frac{a}{b} = q$ & $\frac{c}{d} = m$, erit $a = bq$ & $c = dm$. hinc $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = qm$ & $\frac{ac}{bd} = \frac{bqdm}{bd} = qm$. ergo quae sunt aequalia vni tertio qm, sunt aequalia inter se, ergo $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

REGVLA III. Si quantitates integrae, quibus adhaerent fractiones, sunt multiplicandae, singuli termini multiplicatoris ducantur in singulos multiplicandi. E. g. est $a + \frac{b}{c} \times d = ad + \frac{bd}{c}$. & $a + \frac{b}{c} \times d + \frac{m}{n} = ad + \frac{bd}{c} + \frac{am}{n} + \frac{bm}{cn}$.

Demonst. Est $a + \frac{b}{c} \times d = \frac{ac + b}{c} \times d = \frac{acd + bd}{c}$ (XXXVIII. Reg. I) $= ad + \frac{bd}{c}$. Similiter est $a + \frac{b}{c} \times d + \frac{m}{n} = \frac{ac + b}{c} \times \frac{dn + m}{n} = \frac{(ac + b).(dn + m)}{cn}$ (ib. II) $= \frac{acdn + bdn + acm + bm}{cn} = ad + \frac{bd}{c} + \frac{am}{n} + \frac{bm}{cn}$.

XXXIX.

XXXIX. Coroll. Quantitas quaelibet, siue integra, siue *fracta* ducta in fractionem *propriam* dat factum multiplicando minus. Nam multiplicatio est inuentio Numeri, in quo multiplicandus toties, & ita continetur, quoties & quomodo multiplicator continet Vnitatem. Iam si multiplicator est fractio *propria*, Vnitatem non *integram*, sed eius duntaxat partes aliquot continet, ergo & *factum* non continet multiplicandum *integrum*, sed eius tantum partes tot, & tales, quot & quales multiplicator fractus indicat, ergo factum in hoc casu semper est minus multiplicando.

XL. Problema. Inuenire duorum Numerorum mensuram communem maximam (XXIX).

Resolutio. Diuidatur maior per minorem, si inuenitur quotus, qui ductus in diuisorem restituit diuidendum, ipse ille *diuisor* est mensura communis maxima quaesita. Si vero sit residuum, prior diuisor fiat diuidendus, & residuum illud fiat diuisor, atque ita semper prior vltimus diuisor fiat nouus diuidendus, & prius vltimum residuum fiat nouus diuisor, donec deueniatur ad quotum, qui ductus in diuisorem restituit diuidendum. Tunc vltimus eiusmodi diuisor est mensura quaesita communis maxima datorum Numerorum. Si vero venitur ad residuum = 1, id indicio est, datos duos Numeros non habere factorem communem praeter *Vnitatem*, i. e. esse numeros inter se primos, adeoque non habere mensuram communem, nisi Vnitatem.

Demonstratio. Sint duo Numeri inter se non primi,

primi, $x > y$, quorum mensura communis maxima quaeratur: erit iuxta Regulam datam

$$\text{I)}\ \frac{x}{y} = b + \frac{c}{y}$$ (nempe ex hypothesi residuum sit $= c$, vti in II $= f$, in III) $= k$ &c.)

$$\text{II)}\ \frac{y}{c} = d + \frac{f}{c}$$

$$\text{III)}\ \frac{c}{f} = g + \frac{k}{f}$$

$$\text{IV)}\ \frac{f}{k} = m + \frac{n}{k}$$

$$\text{V)}\ \frac{k}{n} = p$$

Quia iam ex hypothesi n metitur Numerum $= k$, n est mensura communis maxima quantitatum x & y, idque ita demonstratur. Quia est ex hypothesi $\frac{k}{n} = p$, & $\frac{f}{k} = m + \frac{n}{k}$ &c ergo semper est quotus ductus in diuisorem = diuidendo, hinc est $k = pn$

$$f = km + \frac{kn}{k} = km + n$$

$$c = fg + \frac{fk}{f} = fg + k$$

$$y = cd + \frac{cf}{c} = cd + f$$

$$x = by + \frac{cy}{y} = by + c$$

Vnde, facta substitutione, est $f = pmn + n$ &

$e = fg + f = (pmn + n) g + pmn + n = gmnp + gn + pmn + n$ & $y = cd + f = (gmnp + gn + pmn + n) d + pmn + n = gmnpd + dgn + dpmn + dn + pmn + n$ & similiter reperitur $x = bgmnpd + bdgn + bdpmn + bdn + bmnp + bn + gmnp + gn + pmn + n$. Iam vero valorum horum pro x & y mensuram communem maximam esse n, euidens est, ergo est etiam n mensura communis maxima Numerorum x & y. *)

XLI. Problema. Fractionem, cuius Termini non sunt inter se primi, reducere ad minores terminos.

Resolutio. Per inuentam communem mensuram maximam Numeratoris & Denominatoris diuidatur tam Numerator, quam Denominator, & prouenіens noua fractio erit priori aequalis, eoquod simpla eundem quotum praebent, quem eorum aeque multipla. Si autem fractio est spuria, Numerator diuidatur per Denominatorem, & quoto adhaerens, siqua sit, fractio reducatur ad minimos Terminos.

XLII. Problema. Diuidere fractiones.

Regula I. Fractio si diuidenda est per integrum, solus Denominator multiplicetur per integrum. E. g. est $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}$

Demonst.

*) Cl. Vega Vorlesungen über die Mathematik. ster Band in den Zusätzen zum I Bande.

Demonst. Sit $\frac{a}{b} = q$, erit $a = bq$, hinc $\frac{a}{b} : m = \frac{q}{m}$, est vero etiam $\frac{a}{bm} = \frac{bq}{bm} = \frac{q}{m}$; ergo quae sunt aequalia vni tertio $\frac{q}{m}$, sunt aequalia inter se, hinc est $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}$

Regvla II. Si integer est diuidendus per fractum, integer multiplicetur per fractum diuisorem inuersum. E. g. est $a : \frac{b}{c} = a \times \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}$

Demonst. Esto $\frac{b}{c} = q$, ergo $b = cq$; hinc $a : \frac{b}{c} = a : q = \frac{a}{q}$; est vero etiam $\frac{ac}{b} = \frac{ac}{cq} = \frac{a}{q}$: ergo $a : \frac{b}{c}$ & $\frac{ac}{b}$ vtpote aequalia vni tertio $\frac{a}{q}$ sunt aequalia inter se, ergo $a : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}$

Regvla III. Si fractio est diuidenda per fractionem, inuertatur diuisor fractus, & multiplicetur per Diuidendum fractum. E. g est $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

Demonst. Esto $\frac{a}{b}=q$ & $\frac{c}{d}=m$, erit $a=bq$ & $c=dm$; hinc $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=q:m=\frac{q}{m}$. Est vero etiam $\frac{ad}{bc}=\frac{bqd}{bdm}=\frac{q}{m}$, ergo quae sunt aequalia vni tertio $\frac{q}{m}$, sunt aequalia inter se, hinc est $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Regula IV. Si integer, cui adhaeret fractio, est diuidendus vel per *integrum*, vel per *fractum*, vel per integrum, cui adhaeret fractio, mutentur integri, quibus adhaerent fractiones, in fractiones spurias, & fiat dein diuisio iuxta praecedentes Regulas.

E. g. est $\left(a+\frac{b}{c}\right):d=\frac{ac+b}{c}:d=\frac{ac+b}{de}$ (XLII. Reg. I) item $\left(a+\frac{b}{c}\right):\frac{d}{f}=\frac{ac+b}{c}:\frac{d}{f}=\frac{ac+b}{c}\times\frac{f}{d}=\frac{acf+bf}{cd}$ (ibidem III) item $\left(a+\frac{b}{c}\right):\left(d+\frac{f}{k}\right)=\frac{ac+b}{c}:\frac{dk+f}{k}=\frac{ack+bk}{cdk+cf}$, (ibid.)

XLIII. Coroll. I. Quantitas quaeuis, siue *integra*, siue *fracta*, si diuidatur per *fractionem*, prouenit Quotus Diuidendo maior. Namque, quo

minor

minor est Diuisor, manente eodem Diuidendo, eo maior prouenit quotus (id quod planum est ex definitione diuisionis (XXIV)). Iam si Diuisor est *Vnitas*, quotus est ipse Diuidendus: ergo si diuisor est minor *Vnitate*, quotus debet esse maior Diuidendo. Iam vero diuisor, si est fractio propria, semper est < 1, ergo quotus semper debet esse maior Diuidendo.

COROLL. 2. Quodsi fractio de fractione quaeritur, multiplicentur ambae fractiones inter se. E. g. $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ est $= \frac{ac}{bd}$. Namque dum $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d}$ sumendum est, fractio $\frac{c}{d}$ non *integra* accipienda est, sed eius tantum partes *tantae*, *quantas* alterius fractionis $\frac{a}{b}$ denominator *b* indicat. Ergo partes *besimae* & harum partium *besimarum tot* accipiendae sunt, *quot* indicat Numerator *a*. Sed partes *besimae* de $\frac{c}{d}$ accipiuntur, si $\frac{c}{d}$ diuidatur per *b*, vbi prouenit $\frac{c}{d} : b = \frac{c}{bd}$ & partes hae *besimae* accipiuntur *aesies*, si $\frac{c}{bd}$ multiplicetur per *a*, vbi prouenit factum $\frac{ac}{bd}$, ergo est $\frac{a}{b}$ de $\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

DIS-

DISSERTATIO II.

DE EVECTIONE QVANTITATVM AD POTENTIAS, ET EXTRACTIONE RADICVM EX POTENTIIS DATIS.

ARTICVLVS I.

DE NATVRA ET GENESI POTENTIARVM.

1) Definitio. *Potentia*, siue *Dignitas* est quaelibet Quantitas, vel in Vnitatem, vel in semetipsam ducta. Potentia *prima* est omnis quantitas ducta in Vnitatem. Vnde, quia quaelibet quantitas ducta concipi potest in Vnitatem, omnis quantitas est Potentia *prima*: Potentia *secunda*, vel *quadratum* est omnis quantitas in semetipsam *semel* ducta, vel, quod idem est, omnis quantitas bis multiplicatione posita. E. g. est a^2 quadratum quantitatis *a*, nam $a \times a = a\,a = a^2$. Similiter quantitatis a^m quadratum est $= a^m \times a^m = a^{2m}$ item quantitatis $-a^{3n}$ quadratum est $= -a^{3n} \times -a^{3n} = a^{6n}$. Potentia *tertia*, vel *cubus* est omnis quantitas *ter* multiplicatione posita, siue *bis in semetipsam ducta*. Potentia *tertia* ducta in *primam* dat *quartam*, & sic porro. Generaliter quantitatis *a* Potentia *mesima* est a^m.

2) *Digni-*

2) Definitio. Quantitas, ex cuius multiplicatione *Potentia* oritur, dicitur *Radix*. Radix ergo est vel *secunda (quadrata)*, vel *tertia (cubica)*, vel *quarta*, vel generaliter *mesima*, prout vel de *quadrato*, vel *cubo*, vel *Potentia quarta*, vel generaliter de Potentia *mesima* sermo est. Radix *secunda* exprimitur signo $\sqrt{}$, e. g. $a = \sqrt{a^2}$ i. e. quantitas *a* est radix secunda de a^2. *Tertia* signo $\sqrt[3]{}$ e. g. $a = \sqrt[3]{a^3}$, generaliter radix *mesima* exprimitur signo $\sqrt[m]{}$ e. g. $a = \sqrt[m]{a^m}$. Quantitates, quibus praefixum est signum radicale, dicuntur *radicales*, & numeri, siue ciffris, siue literis expressi, qui signis radicalibus sunt inscripti, sunt *Exponentes* signorum radicalium. Vbi nullus est inscriptus, subintelligitur inscriptus numerus 2. Radix *surda* est, quae numeris exprimi nequit. E. g. Radix numeri 3 est *surda*, quia nullus existit numerus, qui in se ipsum ductus det numerum 3. Porro Radix est vel *monomia*, vel *polynomia*, prout vel quantitas *monomia* est, vel *polynomia*.

3) Coroll. Omnis Potentia, cuius Exponens est Numerus *par*, est *positiua*. Quodsi enim *Radix* fuerit *positiua*, ea in se ipsam, quot lubet vicibus ducta, semper dat factum *positiuum*. Si vero fuerit *negatiua*, rursus toties multiplicatione posita, quoties Vnitas in Exponente *pari* est, dat factum *positiuum*, namque — & — in facto semper dant +, vti supra (Differt. I. Art. II. Nro. XXIII. Reg. II.) demonstratum. Ast Potentia Exponentis *imparis* vel *positiua*, vel *negatiua* est, prout Radix data vel *positiua*, vel *negatiua* fuerit.

4) Coroll.

4) Coroll. Ex Definitione *Potentiae* (1) porro sequitur, Potentiam quantitatis cuiusque *monomiae* obtineri, si Exponens singulorum quantitatis *monomiae* factorum ducatur in Numerum, qui indicat gradum Potentiae, & fractionem eleuari ad Potentiam, si tam Numerator, quam Denominator eleuetur ad eam. E. gr. est quadratum de $3a^2b^3 = 9a^4b^6$, & generaliter $(3a^2b^n)^m = 3^m a^{2m} b^{mn}$. Pariter est $\left(\frac{3b^n}{5a^r}\right)^m = \frac{3^m b^{mn}}{5^m a^{mr}}$; & $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} = a^m$. Vnde, quia est a^m Potentia *n*esima de $a^{\frac{m}{n}}$, adeoque vicissim $a^{\frac{m}{n}}$ Radix *n*esima de a^m, generaliter est $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ i. e. *Quantitas Exponentis fracti positiui* $\frac{m}{n}$ *est aequalis Radici, cuius Exponens est fractionis illius Denominator de eadem Quantitate, cuius Exponens est fractionis illius Numerator.* E. g. est $4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = \sqrt{1024} = 32$. Ex quo porro fluit, esse *Potentiam Exponentis fracti negatiui* $ab^{-\frac{m}{n}}$ *aequalem eius coefficienti a diuisa per Radicem, cuius Exponens sit fractionis illius Denominator, de eadem Potentia, cuius Exponens sit Fractionis illius Numerator, sed positiuus.* Namque est $ab^{-\frac{m}{n}} = \frac{a}{b^{\frac{m}{n}}}$ (Diss. I. Art. II. Nro. XXX. Reg. V).

Sed

Sed est $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ (ex mox demonstratis) igitur est $a b^{-\frac{m}{n}} = \frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$. e. g. est $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$.

5) Problema. *Radicem binomiam a+b euehere ad quamuis potentiam.*

Resolutio. Ex definitione *Potentiae* (1) liquet, esse quadratum de *a+b*, siue $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = (a+b) \times (a+b)$: Pariter esse *Cubum*, siue $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^2 \times (a+b)$ & $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = (a+b)^3 \times (a+b)$ & $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 = (a+b)^4 \times (a+b)$

generaliter Potentiam quamque Radicis *binomiae a+b* obtineri, si radix data *binomia* in se ipsam toties ducatur, quoties exponens Potentiae quaesitae, *vnitate multatus*, indicat. Caeterum formulam generalem Potentiae cuiusuis Exponentis *integri*, & *positiui* Binomii *a+b* ad ductum Cl. Kaestneri construemus, vbi primum de Progressionibus egerimus.

6) Coroll. 1. Igitur quadratum Binomii *a+b* constat 1) *quadrato Termini primi radicalis* a, 2) *duplo facto Termini primi radicalis in secundum*, 3) *quadrato Termini secundi radicalis.*

Coroll.

Cor. 2. Posito $a+b = A$, & $c = B$, erit $a+b+c = A+B$. hinc $(a+b+c)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. Vnde substituendo pro A^2 eius valorem $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ & pro $2AB$ valorem $2 \times (a+b) \times c = 2ac + 2bc$, & pro B^2 valorem c^2, obtinetur $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$; i. e. Radicis *trinomiae* $a+b+c$ quadratum constat 1) *quadrato primi termini radicalis*, 2) *duplo facto termini secundi radicalis in primum*, & *quadrato termini secundi radicalis*, 3) *duplo facto termini tertii radicalis* c *in duos praecedentes* $a+b$, & *quadrato termini tertii radicalis*. Generaliter

(7) Theorema. *Quadratum cuiusque Radicis polynomiae constat quadrato singulorum Terminorum radicalium, & duplo facto cuiusque subsequentis in omnes praecedentes.*

Demonstratio. *Vnica* Nota radicalis *a* in quadrato nonnisi vnum Terminum dat, videlicet quadratum sui ipsius $= a^2$, quodsi vero Notae *a* addatur alia *b*, in quadrato $(a+b)^2$ praeter a^2 i. e. praeter quadratum primae Notae radicalis obtinentur adhuc duae partes, videlicet $2ab + b^2$ (5); igitur addita *secunda* Nota radicalis *b* in quadrato duas partes praebet, videlicet 1) $2ab$, i. e. *duplum factum Notae secundae radicalis* b *in primam* a & 2) b^2, i. e. *quadratum Notae secundae radicalis*. Quia iam, quotquot Notarum fuerit Radix data Polynomia, omnes Notae radicales ante vltimam possunt vocari $= A$ & vltima $= B$, (*vltimam autem quamcunque post primam a dicere potes*), necessario quaelibet Nota radicalis subsequens in

qua-

quadrato easdem duas partes praebet, quas Notam secundam *B* praebere vidimus, ergo. Idem etiam ex natura Multiplicationis facile intelligitur. Namque vt *quadratum* Radicis cuiusque polynomiae oriatur, haec radix est per semetipsam semel multiplicanda. Sed ex natura Multiplicationis quantitatis polynomiae per semetipsam liquet, quamlibet Notam radicalem subsequentem 1) *his* multiplicari per omnes praecedentes; vnde *duplum eius in omnes praecedentes factum oritur*, 2) semel per semetipsam, vnde *quadratum eius habetur*. Ergo.

8) Coroll. Vnde Radicis quoque *numericae* ciffris expressae quadratum constat 1) *quadrato ciffrae primae sinistimae*, 2) *duplo facto cuiusuis ciffrae subsequentis in omnes praecedentes*, & *quadrato cuiusuis ciffrae subsequentis*. Namque quaelibet eiusmodi Radix resolui potest in simplices Vnitates, signo + connexas, atque hae Vnitates possunt poni = a+b+c+d &c. siue generaliter = $A+B$. Vnde iisdem partibus, quas habet quadratum de $A+B$, constare quoque debet quadratum cuiusuis Radicis numericae. Sed $(A+B)^2$ constat, vt vidimus, praefatis partibus, ergo & cuiuslibet Radicis numericae, ciffris expressae quadratum iisdem constet, necesse est. Est e. g. $2345 = 2000+300+40+5 = a+b+c+d$. Igitur erit quoque $(2345)^2 = (a+b+c+d)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2 . (a+b) . c + c^2 + 2 . (a+b+c) . d + d^2 = (2000+300+40+5)^2 = (2000)^2 + [2 . 2000 . 300] + (300)^2 + [2 . (2000+300) . 40] + (40)^2 + [2 . (2000+300+40) . 5] + 5^2 = 4000000 + 1200000 + 90000 + 184000 + 1600 + 23400 + 25 = 5499025$.

Vnde

Vnde modus liquet, datae cuiusuis Radicis numericae, ciffris expressae, quadratum ex ipsis illico ciffris formandi. Fiat videlicet *primo* quadratum primae ciffrae sinistimae: *dein* duplum Factum ciffrae secundae in primam, & quadratum secundae, atque haec ita sibi subscribantur, vt continuo numerus sequens a praecedente vno loco versus dextram recedat (die Zahlen müssen so unter einander geschrieben werden, dass die folgenden immer um eine Ziffer weiter hinaus gegen die rechte Hand zu gerücket werden). *Tertio* fiat duplum factum tertiae ciffrae in duas praecedentes, & quadratum tertiae, & sic porro, atque haec facta prioribus subscribantur, vt antea dictum, additione facta, habebitur quadratum.

E. g. est $(234)^2 = \left\{\begin{array}{l} 4 \\ 12 \\ \;\;9 \\ \;184 \\ \;\;\;16 \end{array}\right\} = 54756$

Namque est $(234)^2 = (200 + 30 + 4)^2 = 40000 + 12000 + 900 + 1840 + 16 =$

$$\begin{array}{r} 40000 \\ 12000 \\ 900 \\ 1840 \\ 16 \end{array}$$

Quodsi iam zeri ciffris significantibus addendi omittantur, prouenit praescripta superius Notarum positio, videlicet

$$\left.\begin{array}{l}4\\12\\9\\184\\16\end{array}\right\} = 54756$$

Vnde datae Theoriae veritas manifesta. Pariter est

$$(2345)^2 = \left.\begin{array}{l}4\\12\\9\\184\\16\\2340\\25\end{array}\right\} = 5499025$$

9) Definitio. Quadratum cuiusuis Radicis polynomiae dicitur *perfectum*, in quo partes omnes adsunt, & etiam nonnisi eae adsunt, quae iuxta Theorema (7) in quadrato Radicis cuiusque polynomiae adesse debent; secus autem, si vel quidquam deest, vel abundat, est *imperfectum*. E. g. $a^2 \pm 2ab$, item $a^2 \pm 2ab \pm 3b^2$ sunt quadrata *imperfecta* Radicis *binomiae* $a \pm b$. Ast $a^2 \pm 2ab \pm b^2$ est quadratum *perfectum* eiusdem Radicis.

10) Theorema. Potentia *tertia* Radicis binomiae $a \pm b$ constat 1) Cubo primae Notae radicalis a, 2) triplo quadrato primae Notae radicalis a ducto in secundam b, + triplo quadrato secundae, ducto in primam, & Cubo secundae Notae radicalis.

Demonstratio liquet ex Cubo de $a \pm b$, qui est $= a^3 \pm 3a^2b \pm 3ab^2 \pm b^3$.

11) Co-

11) Coroll. Posito $A = a + b$ & $B = c$, erit $A + B = a + b + c$, hinc etiam $(a+b+c)^3 = (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$. Igitur substituendo pro A^3 eius valorem $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, & pro $3A^2B$ valorem $3 \times (a+b)^2 \times c = 3 \times (a^2 + 2ab + b^2) \times c = 3a^2c + 6abc + 3b^2c$, & pro $3AB^2$ valorem $3 \times (a+b)c^2 = 3ac^2 + 3bc^2$ & pro B^3 valorem $= c^3$, erit $(A+B)^3 = (a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$. Eodem modo si fiat $A = a + b + c$ & $B = d$, reperitur $(a+b+c+d)^3 = (A+B)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3$ & sic porro. Vnde liquet 1) vnicam Notam radicalem *a* in Cubo dare vnum duntaxat Terminum, videlicet Cubum sui ipsius, 2) alteram vero Notam radicalem *b*, priori additam, in Cubo tres partes praebere, quarum *prima* contineat *triplum factum ex quadrato primae Notae radicalis in secundam*, *altera triplum factum ex quadrato secundae in primam*, & *tertia Cubum ipsius alterius Notae radicalis* b. 3) Tertiam Notam radicalem *c* in Cubo etiam praebere tres partes, quarum *prima* contineat *triplum factum ex quadrato duarum praecedentium in tertiam*, *secunda triplum factum ex quadrato tertiae in duas praecedentes*, & *tertia Cubum tertiae Notae radicalis*. Generaliter

12) Theo-

12) THEOREMA. *Cubus cuiusque Radicis polynomiae constat 1) Cubo singularum Notarum radicalium, 2) triplo quadrato Notarum radicalium praecedentium ducto in quamque Notam radicalem subsequentem, 3) triplo quadrato cuiusque Notae radicalis subsequentis, ducto in omnes praecedentes.*

Demonstratio. Ex dictis (11) quisque Terminus *secundus* radicalis *B* in Cubo dat tres partes, 1) *triplum factum ex quadrato primae Notae radicalis* A *ducto in secundam* B, 2) *triplum factum ex quadrato secundae Notae radicalis* B *ducto in primam* A, 3) *Cubum Notae secundae radicalis* B. Iam vero Radicis *polynomiae* Terminus quilibet post primum *a*, potest considerari vt secundus *B*, si omnes praecedentes fiant = A; ergo quisque etiam terminus Radicis polynomiae, post primum *a*, in Cubo dat praefatas tres partes, adeoque Theorema verum.

13) COROLL. Igitur Radicis quoque numericae, ciffris expressae Cubus praefatis partibus constat. Namque eiusmodi Radix numerica resolui potest in simplices Vnitates, quae dici possunt $= a + b + c + d$ &c. $= A + B$. Vnde quot partibus constat Cubus radicis polynomiae literalis, tot, & iisdem quoque partibus constet necesse est Cubus radicis ciffricae, vti iam supra (8) dictum. E. g. est $(221)^3 = (200 + 20 + 1)^3 = (a + b + c)^3$. Est vero $(a + b + c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3.(a + b)^2.c + 3.(a + b)c^2 + c^3$.

Ergo

Ergo quoque est $(200+20+1)^3 = (200)^3 + 3 \times (200)^2 \times 20 + 3 \times 200 \times (20)^2 + (20)^3 + 3 \times (220)^2 \times 1 + 3(220) \times 1^2 + 1^3 = 8000000 + 2400000 + 240000 + 8000 + 145200 + 660 + 1 = 10793861$. Vnde modus liquet, quo Radicis datae ciffricae Cubus ex ipsis illico ciffris formari queat. Fiat nimirum 1) *Cubus primae Notae radicalis sinistimae*, 2) *triplum factum ex quadrato ciffrae primae sinistimae in secundam; triplum factum ex quadrato secundae in primam, & Cubus secundae*, 3) *triplum factum ex quadrato duarum ciffrarum primarum in tertiam, triplum factum ex quadrato tertiae in duas praecedentes, & Cubus tertiae*. Et sic porro. Atque Numeri ita obtenti sibi subscribantur ita, vti iam superius (8) dictum, & Summa erit Cubus quaesitus. E. g. est

$$(221)^3 = \left[\begin{array}{l} 8 \\ 24 \\ \;\,24 \\ \quad\;\, 8 \\ \;\;1452 \\ \qquad\;\, 66 \\ \qquad\quad\;\, 1 \end{array}\right] = 10793861$$

14) Definitio. Cubus est *perfectus*, qui *praecise* iis partibus constat, quae iuxta Theorema superius (12) in Cubo Radicis polynomiae adesse debent. Secus est *imperfectus*.

15) Corollarium. Quemadmodum ex genesi Quadrati & Cubi Radicis polynomiae hactenus vidimus, Notam primam radicalem in Potentia dare *vnum* tantum Terminum, videlicet quadratum, vel

vel Cubum sui ipsius, reliquas singulas vero dare in quadrato *duas*, & in Cubo *tres* partes; ita pariter ex genesi Potentiae *quartae*, *quintae* &c. intelligitur, Terminum primum radicalem *a* dare in Potentia quarta, & quinta &c. *vnum* tantum Terminum; reliquas autem notas radicales singulas dare in Potentia *quarta quatuor* partes, in quinta *quinque*, in sexta *sex*, generaliter tot partes, quot sunt Vnitates in exponente Potentiae. Atque Potentiae hae omnes, modo exposito natae, siue iis *praecise* partibus constantes, quibus iuxta suam genesin constare debent, dicuntur *perfectae*, secus *imperfectae*. Quibus praemissis facile quoque iam intelligitur, quomodo ex data quadam Potentia Radix extrahi, i. e. ea ipsa quantitas inueniri possit, ex cuius secum ipsa Multiplicatione Potentia data orta est. De qua Radicis Extractione agat

ARTICVLVS II.

DE EXTRACTIONE RADICVM E POTENTIIS DATIS.

a) *Ciffricis.*

Vniuersa Radicis e Potentia data ciffrica extrahendae methodus nititur sequenti Theoremate.

16) THEOREMA. *Potentia quaelibet ciffrica si ita diuidatur in classes, vt cuiuis classi, incipiendo a dextra, tot Notae adsignentur, quot sunt Vnitates in Exponente Potentiae datae, excepta vltima classe sinistima, quae etiam vnius tantum Notae esse*

 potest,

potest, tot obtinentur classes, quot fuerunt Notae radicales.

Demonstratio continetur in genesi Potentiarum, Articulo praecedente exposita. Quodsi enim sermo sit de *quadrato*, in eo continetur 1) *Quadratum singularum Notarum radicalium*, & 2) *duplum factum cuiuslibet Notae radicalis subsequentis in omnes praecedentes* (7), ita, vt Nota radicalis *prima a* in quadrato det *vnicum* duntaxat Terminum, videlicet quadratum sui ipsius a^2, quaelibet subsequens vero *duas* partes praebeat, supra (7. 8) expositas. Igitur si *quadratum ita dimidatur in classes, vt incipiendo a dextra, cuiuis classi adsignentur tot Notae, quot sunt Vnitates in Exponente Quadrati*, i. e. *duae* (nam Exponens quadrati est = 2), *excepta vltima classe sinistima, quae potest etiam vnius tantum Notae esse* (id quod dependet ex quantitate primarum Notarum radicalium *) *cuilibet iam classi correspondet vna Nota radicalis*, *igitur tot erunt classes, quot fuerunt Notae radicales.* Et quidem in *prima* classe sinistima continebitur quadratum primae Notae radicalis sinistimae, in *duabus* primis classibus vero quadratum duarum primarum Notarum radicalium, & in tribus primis

*) Si prima Nota radicalis est > 3, classis prima sinistima in quadrato constat duabus Notis; nam si ea e. g. sit = 4, quadratum eius iam erit = 16. Quodsi vero ea sit = vel < 3, tunc prima classis sinistima in quadrato vel *vnica* Nota constat, vel duabus, prout ciffrae illae, quae ex partibus illis, quas subsequentes Notae radicales in quadrato dant, illi subscribuntur, eam nouenario vel maiorem per additionem reddunt, vel non.

primis classibus simillimis quadratum trium primarum Notarum radicalium, & sic porro. Quod ut luculentius pateat, fiat quadratum alicuius Numeri, e. g. 232, erit

$$(232)^2 = \left\{\begin{array}{l}4\\ 12\\ \quad 9\\ \quad 92\\ \qquad 4\end{array}\right\}$$

iuxta superius (8) dicta. Quodsi iam post quadratum primae Notae radicalis 2, scilicet post 4 ducatur linea, uti & post *duas* partes, quas quaelibet subsequens Nota radicalis in quadrato praebet, semper ducatur linea, suopte in quadrato $53824 = (232)^2$ obtinebuntur classes, in Theoremate expressae, videlicet erit

$(232)^2 =$

4		
1	2	
	9	
	9	2
		4
5	38	24

Pariter est $(22)^2 =$

4	
	8
	4
4	84

Et $(999)^2 =$

81		
16	2	
	81	
1	78	2
		81
99	80	01

Eodem modo Theorematis veritas demonstratur, si sermo sit de *Cubo*, Potentia *quarta* &c. Videamus tantum de *Cubo*.

Quotcunque Notis constet Radix cubica,

prima Nota radicalis sinistima in Cubo dat vnum tantum Terminum, videlicet sui ipsius Cubum. Quaeuis subsequens autem Nota radicalis dat in Cubo *tres* partes, supra (12. 13) recensitas. Ergo si Cubus datus diuidatur ita in classes, vt, incipiendo a dextra, cuiuis classi tot Notae adsignentur, quot sunt Vnitates in Exponente Potentiae cubicae, i. e. *tres*, (eoquod Exponens Cubi est = 3), excepta vltima classe sinistima, quae vnius etiam tantum Notae esse potest (id quod rursus ex quantitate primarum Notarum radicalium dependet) tot erunt classes, quot fuerunt Notae radicales. Et quidem in prima classe sinistima erit *Cubus* primae Notae radicalis, in duabus primis classibus erit Cubus duarum primarum Notarum radicalium, & sic porro. Quod vt euidentius fiat, fiat rursus Cubus cuiusdemumcunque Numeri, e. g. 221. Erit iuxta superius (13) dicta

$$(221)^3 = \begin{cases} 8 \\ 24 \\ \quad 24 \\ \qquad 8 \\ 1452 \\ \quad\; 66 \\ \qquad\quad 1 \end{cases}$$

Quodsi iam post Cubum primae sinistimae Notae radicalis 2 scilicet post 8 ducatur linea, & post tres partes, quas quaelibet subsequens Nota radicalis in Cubo dat, pariter ducatur linea, sponte rursus in Cubo 10793861 = $(221)^3$ obtinebuntur classes in Theoremate expressae. Erit nempe

$(221)^3$

$(221)^3 =$

8	.	
2	4	
	24	
	8	
	145	2
		66
		1
10	793	861

Pariter est $(23)^3 =$

8	
3	6
	54
	27
12	167

Item est $(12)^3 =$

1	
	6
	12
	8
1	728

17) Corollarium. Quia ergo cuilibet classi Potentiae datae numericae correspondet vna Nota radicalis, consequens est, vt tot semper sint inueniendae Notae radicales, quot adsunt in data Potentia classes. Igitur ex numero classium innotescit illico numerus Notarum radicalium inueniendarum, quarum proinde etiam valor *localis* cognoscitur. E. g. si tres adsint classes, erunt quoque inueniendae tres Notae radicales, quarum prima sinistima denotat *centenarios*, altera *decades*, tertia simplices *vnitates*.

18) Pro-

18) PROBLEMA. *Ex quadrato dato ciffrice extrahere radicem.*

Resolutio. Diuidatur quadratum datum in classes (16). Quodsi A) nonnisi *vna* classis obtineatur, erit etiam inuenienda Radix *vnius* tantum Notae (17): atque ad hanc inueniendam parata habeatur Tabula Potentiarum pro Numeris radicalibus ab 1 ad 9, videlicet

x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

In qua Tabula ad altiores Potentias facile, si opus sit, continuanda continentur Radicum ab 1 ad 9, in prima columna x positarum, Potentiae nouem primae. Vnde, si data sit e. g. Potentia quinta 7776, & quaeratur eiusdem Radix, facta eius in classes diuisione, patet, vnam tantum classem, quae nequidem *quinque* Notis constet, obtineri, adeoque Radicem vnius tantum Notae esse posse. Vt iam haec vnius Notae Radix inueniatur, quaeratur Numerus propositus 7776 in columna x^5, quippe quae Potentiam quintam Radicum vnius Notae ab 1 ad 9 continet. Quodsi inueniatur Potentia data in hac columna, dispiciatur, quinam illi Numerus correspondeat in columna prima x, quae Radices vnius Notae ab 1 ad 9 continet. Correspondet illi Numerus 6, igitur est $6 = \sqrt[5]{7776}$. Quodsi vero Potentia data *vnius classis* non reperitur in hac Tabula, si opus sit, continuanda, id indicio est, Potentiam datam non esse *perfectam* (15). E. g. 7 est Potentia secunda *imperfecta* vel Numeri 2, vel Numeri 3. Sed de Extractione Radicis ex Potentia *imperfecta* infra dicetur.

Quodsi B) Quadratum datum sit plurium classium (e. g. 484, quod duabus classibus constat, si iuxta Theorema superius (16) diuidatur) tunc, vt inueniatur Radix, seruentur sequentes Regulae, quibus sua statim Demonstratio est adiecta.

Quadratum datum	$\frac{R}{a+b}$	N
4, 84	2. 2	42
4		2
0 8,4		84

REGVLA I. In prima classe *finistima*, quae in Quadrato adiecto est 4, continetur Quadratum primae Notae radicalis inueniendae finistimae, & in duabus primis classibus *finistimis* continetur quadratum duarum primarum Notarum radicalium inueniendarum vti supra (in Demonstratione Theorematis 16) dictum. Igitur quaeratur Numeri 4, qui primam classem *finistimam* constituit, ope Tabellae superioris (18) Radix vera, vel vera proxime minor, si adcurata ibi non inueniatur. Erit haec = 2. Igitur inuenta est prima Nota radicalis = 2, ponenda loco separato in *R* sub litera *a*. Eleuetur iam haec prima Nota radicalis 2 ad quadratum, atque quadratum hoc = 4 subtrahatur ex Numero 4 primam classem finistimam constituente. Si nihil remanserit, id indicio est, in prima classe finistima *solum*, siue *perfectum* primae Notae radicalis finistimae quadratum contineri. Si vero quidpiam remanserit, id indicio est, in prima classe finistima praeter quadratum perfectum primae Notae radicalis contineri adhuc quidquam ex illis partibus, quas subsequentes Notae radicales in quadrato praebent (6), id quod ex iis facile intelligitur, quae supra (8) de modo diximus, datae Radicis *ciffricae* quadratum ex ipsis illico ciffris formandi.

REGVLA II. Siquid, facta subtractione quadrati inuentae primae Notae radicalis ex prima classe quadrati dati, sit residui, huic iungatur sequens classis 84, & si nihil sit residui, sequens classis

classis 84 infra lineam subtractionis sola scribatur atque cum in hac classe secunda 84 contineantur duae illae partes, quas inuenienda secunda Nota radicalis in quadrato dat, videlicet a) *duplum factum secundae Notae radicalis in primam* & b) *quadratum secundae* (16); hinc, vt intelligatur, vbi contineatur *duplum factum ex prima Nota radicali in secundam*, & vbi lateat *quadratum secundae Notae radicalis*, vltima secundae classis Nota dextima, videlicet 4 a praecedentibus separetur virgula, vti in Schemate adiecto videre est. Erit in rescissa vltima Nota 4 *quadratum* secundae Notae radicalis, & in Nota praecedente 8, (vel Notis praecedentibus, si plures fuerint) *duplum factum ex prima Nota radicali in secundam*. Namque cum inueniendae sint duae Notae radicales, quas a+b vocemus, prima sinistima *decades*, & altera simplices *vnitates* denotat. Igitur duplum factum *primae in secundam* est duplum factum *decadum in vnitates*. Sed 10 ⋈ 1 = 10 igitur duplum hoc factum primae Notae radicalis in secundam continetur in decadibus quadrati dati, & quadratum secundae Notae radicalis inueniendae, quod est $= 1^2 = 1$ (nam secunda Nota radicalis inuenienda denotat hic vnitates), latet in vnitatibus quadrati dati. Sed Nota vltima rescissa 4 continet vnitates, & altera 8 decades, ergo. Vt igitur obtineatur secunda Nota radicalis, Numerus ille 8, in quo ex demonstratis continetur factum ex *duplo Termini primi radicalis in secundum*, diuidatur per duplum Termini primi radicalis, scilicet per 4; obtinebitur quotus = 2 i. e. *Nota secunda radicalis*, ponenda sub litera *b*. Facto enim quocunque *a b* diuiso per alterutrum facto-

factorem (hoc loco per *duplum Termini primi radicalis* =2a) factor alter *b* est quotus. Fiant iam, vt intelligatur, Notam secundam radicalem b = 2 esse legitimam, eae partes, quas Nota quaelibet radicalis secunda in quadrato dat, videlicet 1) *duplum factum ex Nota radicali secunda in primam*, siue factum ex duplo Termini primi radicalis in secundum, & 2) *quadratum Notae secundae radicalis*. *Illud* erit = 80 vnitatibus (namque Notae primae radicalis 2 valor verus est = 20 vnitatibus = 2 decadibus, hinc duplum eius = 40 ductum in Notam radicalem secundam = 2 dat 80 vnitates = 8 decadibus), & *hoc* = 4. Inde 80+4 = 84 quod idem obtinetur, si, vti in columna *N* Schematis supra positi videre est, post duplum Termini primi radicalis = 4 ponatur absque signo altera Nota radicalis = 2, & totus Numerus 42 multiplicetur per secundam Notam radicalem 2. Subtrahatur iam Numerus obtentus 84 a residuo 8, 4 Dum nihil remanet, id indicio est, in residuo 8, 4 contentas fuisse solas illas duas partes, quas Nota secunda radicalis in quadrato dat, adeoque iam ex quadrato dato perfecto erit extracta Radix 22. Veram esse hanc Radicem praefato modo inuentam, ex eo liquet, quia nec *maior* nec *minor* vera dati quadrati Radice esse potest. Si enim maior foret, partes quoque, quas singulae eius Notae in quadrato dare debent, simul sumtae deberent esse maiores quadrato dato. Sed si hoc, non possent a quadrato dato subtrahi, ita, vt nihil sit residui; quod tamen hic secus esse, ipsa operatio monstrauit. Si autem foret minor, partes quoque, quas singulae eius Notae in quadrato dant, simul sumtae,

i.

i. e. *eius ipsius quadratum* foret minus quadrato dato. Sed si hoc; illud a quadrato dato subtractum relinqueret quidquam. Cum ergo nihil hic sit residui, euidens est, Radicem exposito modo inuentam esse *veram*.

REGVLA III. Si quadratum datum tribus classibus constet, e. g. 5. 47. 56,

Q.	R. a+b+c	N.
5 · 47 · 56	2 3 4	43
4		3
147		129
129		
1856		464
1856		4
0		1856

erunt etiam inueniendae tres Notae radicales (17), quarum prima sinistima est *centenaria*, secunda *decadica*, & tertia continet *vnitates simplices*. Igitur quaerantur inprimis iuxta Regulas praecedentes ex binis classibus primis sinistimis duae primae Notae radicales 23=a+b atque si, dum earum quadratum subtractum est ex primis duabus classibus sinistimis, fuerit quidquam residui, (vti in quadrato dato remanet 18, huic iungatur tertia classis quadrati dati 56, & vltima huius classis Nota *dextima*

6

cursus a reliquis virgula resecetur. Duae inuentae Notae radicales 23 = a + b habeantur iam pro vna, sicuti supra (6. Coroll. 2) ponebatur a + b = A, & tertia Nota radicalis adhucdum inuenienda dicatur = B; quo posito, erit ex quadrato dato sublatum quadratum A^2 i. e. quadratum duarum primarum Notarum radicalium, & hinc in residuo 185,6 continebuntur adhuc duae illae partes, quas quaelibet Radicis polynomiae Nota subsequens B in quadrato dat, videlicet 1) *factum ex duplo Terminorum praecedentium in subsequentem* B, & 2) *quadratum inueniendae Notae* B, & quidem in Nota tertiae classis vltima dextima 6 continebitur B^2; & in reliquis 185 continebitur $2AB$, i. e. *duplum factum tertiae Notae radicalis in duas praecedentes*: Namque dum duae Notae primae radicales inuentae habentur pro *vna* = A, eae iam denotant *decades*, & Nota radicalis adhuc inuenienda B simplices vnitates. Sed factum ex decadibus in vnitates semper dat *decadas*, igitur duplum factum tertiae Notae radicalis in duas praecedentes continetur *in decadibus*, & quadratum tertiae Notae radicalis continetur in *vnitatibus*, Sed Numerus 6 continet vnitates, & 185 decades, ergo. Diuidatur iam itaque Numerus 185, in quo latet $2AB$, per $2A$, i. e. per $2 \times 23 = 46$, & obtinebitur $B = 4$ ceu tertia Nota radicalis quaesita e. fiant iam iterum eae partes, quas tertia Nota radicalis in quadrato praebet, videlicet $2AB + B^2$ $= (2A + B) \times B = (460 + 4) \times 4 = 464 \times 4$, prouenit 1856, quod factum si subtrahatur e residuo 185,6, nihil remanet. Vnde Radix vera est 234. Pari modo reperitur Radix ex quadrato *perfecto* plu-

plurium classium. Nota nimirum radicalis adhuc inuenienda dicatur semper = B; & inuentae omnes = A, & reliqua fiant iuxta Regulas praecedentes.

Regvla IV. Quodsi in diuisione numeri illius, in quo continetur duplum factum inueniendae Notae radicalis in omnes praecedentes iam inuentas, per duplum Notarum radicalium iam inuentarum = 2A, sumatur quotus iusto maior (maximus non potest esse maior nouenario, quia Radicis ciffricae nulla Nota esse potest maior, quam 9), semper, si fiat duplum factum huius ipsius Notae radicalis in omnes praecedentes, & eius quadratum, proueniet Numerus *maior*, quam qui subtrahi possit ex ea parte quadrati, e qua partes illae subtrahendae sunt. Igitur si assumpto quoto B factum $2AB + B^2$ maius est, quam vt possit subtrahi e Numero e. g. 18556, quotus B iusto maior est. Et si quotus B adsumptus est iusto minor, in fine semper erit quidquam residui, quod esse non potest, vbi de quadrato perfecto sermo est. Tentando igitur quotus legitimus est inueniendus.

Regvla V. Quodsi Numerus ille, qui continet duplum factum ex inuenienda Nota radicali in omnes praecedentes iam inuentas, fuerit minor, quam duplum Terminorum radicalium iam inuentorum = 2A, vbi proinde Numerus ille non potest ita diuidi per 2A, vt *integer* quotus resultet, in quoto seu sequens Nota radicalis scribatur *zerus*, & statim Numero illi iungatur sequens classis, & pergatur, vt antea. Tandem

Re-

Regula VI. Quodsi inuentis vna vel pluribus Notis radicalibus supersunt in quadrato dato solae classes meris zeris constantes, sine residuis Notis significantibus; inuentis Notis radicalibus adiiciantur tot zeri, quot supersunt classes meris zeris constantes. Quilibet enim zerus Radicis dat in Potentia quaque vnam classem, tot constantem zeris, quot indicat exponens ipsius Potentiae, vti ex ipsa Multiplicatione Numerorum, in fine zeros habentium, per semetipsos, & ex quadrati inde orti iuxta superius dicta (16) in classes diuisione liquet. Ita Radicis 30 Quadratum est 900, vnde vicissim quadrati 9.00 vera Radix est 30. & $(3000)^2 = 9000000 = 9.00.00.00$; vnde & $\sqrt{9000000} = 3000$.

Demonstratio. Radix, iuxta Regulas praecedentes obtenta ducta in semetipsam semper restituit Quadratum datum, *si hoc perfectum fuerit*, ergo ea rite est extracta. Conf. dicta sub finem Regulae superioris II.

19) Problema. Ex dato Numero, perfecte cubico, extrahere Radicem.

Resolutio. Diuidatur datus Cubus in classes iuxta Praescriptum (16). Si nonnisi vnica classis obtineatur, erit etiam vna tantum Nota radicalis inuenienda (17), & haec inuenitur ex Tabula superiore (18). Quodsi vero obtineantur plures classes, e. g. tres in Cubo 80,621,568, tunc seruentur sequentes Regulae, quibus iterum sua statim Demonstratio est adiecta.

Cubus

Cubus	R.	M $3a^2 = 48$
	$a+b+c$	$3a^2b = 144$
80.621.568	4 3 2	$3ab^2 = 108$
64		$b^3 = 27$
D) 166,21		Summa = 15507
15507		N. $3A^2 = 5547$
E) 11145.68		$3A^2B = 11094$
11145 68		$3AB^2 = 516$
0		$B^3 = 8$
		Summa = 111456

Regvla I. In prima classe sinistima 80 continetur Cubus primae Notae radicalis inueniendae, & in duabus primis classibus 80.621 latet Cubus duarum primarum Notarum radicalium (16). Igitur quaeratur Numeri 80 in Tabula superiore (18) Radix cubica vel vera, vel vera proxime minor. Est haec = 4, scribenda loco separato in *R* sub litera *a*. Eleuetur iam 4 ad Cubum, atque Cubus hic = 64 subtrahatur e prima classe 80, & residuo 16 iungatur sequens classis 621. Si nihil sit residui, sequens classis 621 sola scribatur infra lineam subtractionis, eaque vocetur (vna cum residuo, siquod fuerit) = D.

Regvla II. Quia in duabus primis classibus 80.621 ex dictis (praeced.) latet Cubus duarum primarum Notarum radicalium; consequens est, vt, cum Cubus primae Notae radicalis 4 sit iam

sub-

subtractus ex Cubo duarum primarum Notarum radicalium, in residuo Numero D = 16621 contineantur adhuc tres illae partes, quas iuxta superius (10. 11. 12) dicta altera Nota radicalis in Cubo praebet, videlicet 1mo *triplum factum ex quadrato primae Notae radicalis in secundam*, 2do *triplum factum ex quadrato secundae Notae radicalis in primam*, & 3tio *Cubus secundae Notae radicalis*. Sicuti, dum ex Cubo $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ subtrahitur a^3 i. e. Cubus primae Notae radicalis *a*, remanent praefatae tres partes, quas altera Nota radicalis *b* in Cubo dat, nimirum $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Et quidem in vltima huius Numeri D = 16621 Nota *dextima* videlicet in 1 continetur Cubus secundae Notae radicalis inueniendae in penultima 2 triplum factum ex quadrato Notae secundae radicalis in primam, & in reliquis 166 continetur triplum factum ex quadrato primae Notae radicalis in secundam. Namque cum sint tres Notae radicales inueniendae (17), quas vocemus $a + b + c$, erit prima sinistima *centenaria*, secunda *decadica*, & tertia *monadica*. Igitur Nota secunda radicalis, quam modo quaerimus, est *decadica*, & inuenta prima 4 est *centenaria* = 400 vnitatibus. Igitur *Cubus* Notae secundae radicalis *b* est = 10 × 10 × 10 = 1000 i. e. Cubus iste b^3 latet in *millenariis* dati Cubi integri, & perfecti, adeoque in Numeri D = 16621 Nota vltima *dextima* 1, quippe quae *millenarios* Cubi dati integri & perfecti continet. Pariter triplum factum ex quadrato secundae Notae radicalis in primam i. e. $3ab^2$ continetur in decadibus millenariorum dati Cubi integri & perfecti. Namque quia altera Nota radicalis *b* est

est *decadica*, & prima *a centenaria*, erit $3ab^2$ triplum factum ex quadrato decadum in centenarios, sed est $10^2 \times 100 = 10000$. Igitur $3ab^2$ continetur in *decadibus millenariorum*. Sed hos continet Numeri 16621 penultima Nota dextima 2, vti patet, si, vt oportet, valor eius localis computetur a Nota prima *dextima* totius Cubi dati. Ergo in 2 continetur $3ab^2$. Tandem $3a^2b$ i. e. *triplum factum ex quadrato primae notae radicalis in secundam* continetur in reliquis ciffris 166 Numeri *D*. Namque $3a^2b$ est triplum factum ex quadrato *centenariorum* in *decades*. Sed est $100^2 \times 10 = 100000$. Igitur $3a^2b$ continetur in *centenariis millenariorum*. Sed centenarii millenariorum incipiunt in Numeri 16621 ciffra versus sinistram tertia 6, vti rursus patet, si ciffrae praefatae 6 valor localis computetur a Nota prima dextima totius Cubi dati. Ergo in 166 latet $3a^2b$. Atque inde est, cur *duae* Notae vltimae dextimae cuiusque classis residuae, & infra lineam subtractionis collocatae, virgula resecentur a reliquis, vt nimirum pateat, vbi contineatur $3a^2b$, & vbi $3ab^2$, & vbi b^3 *). Quo cognito diuidatur Numerus ille 166, in quo latet $3a^2b$ (i. e. triplum factum primae Notae radicalis in secundam) per $3a^2$ (i. e. per triplum quadratum primae Notae radicalis *a* iam inuentae) & obtinebitur quaesita Nota secunda radicalis *b*. Namque facto

$(3a^2b)$

---

*) Vbi de extrahenda Radice e *quadrato* sermo est, *vna* tantum Nota vltima dextima cuiusque classis residuae virgula a reliquis separatur, quia dempto quadrato a^2, in residuo latent tantum adhuc duae partes, nimirum $2ab + b^2$.

$3a^2b$ diuiso per alterutrum factorem $3a^2$, factor alter b est quotus. Erit igitur $\frac{166}{3a^2} = \frac{166}{3 \times 4^2} = \frac{166}{3 \cdot 16} = 3$ altera Nota radicalis ponenda in *R* sub litera *b*.

REGVLA III. Vt iam pateat, an haec Nota radicalis secunda $b = 3$ sit vera (i. e. nec iusto maior, nec minor) fiant trea illae partes, quas quaelibet subsequens Nota radicalis *b* in Cubo dat (10, 11. 12), videlicet $3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Erit $3a^2b = 144$, & $3ab^2 = 108$, & $b^3 = 27$. Ponantur iam hae tres partes, vti in *M*, ita, vt Notae dextimae semper recedant vno loco versus dextram, & Summa 15507 subtrahatur a Numero $D = 16621$, eritque residuum $= 1114 = E$. Ratio autem praescriptae Positionis trium praefatarum partium $3a^2b + 3ab^2 + b_3$ suopte patet, si earundem trium Partium, sibi addendarum, valor verus expendatur. Est enim $3a^2b = 14400000$ Vnitatibus. Namque prima Nota radicalis $a = 4$ est *centenaria*, adeoque $= 400$ Vnitatibus, & altera $b = 3$ est *decadica* adeoque $= 30$ Vnitatibus. Hinc est $3a^2b = 14400000$ Vnitatibus. Similiter est $3ab^2 = 3 \cdot 400 \cdot (30)^2 = 1080000$ Vnitatibus, & $b^3 = (30)^3 = 27000$ Vnitatibus. Hinc est $3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$= \left\{\begin{matrix} 14400000 \\ +1080000 \\ +27000 \end{matrix}\right\}.$$

Jam si zeri omittantur, resultat Positio praefatarum trium partium praescripta, & Summa omnium est $= 15507$

$=15507$. Atque huius Summae Nota prima dextima 7 est *millenaria* propter omissos tres zeros. Zeri autem hi propterea omittuntur, quia & Numeri $D=16621$ (in quo latent adhuc $3a^2b+3ab^2+b^3$, & a quo Summa $3a^2b+3ab^2+b^3$ est subtrahenda, vt adpareat, Notam secundam radicalem $b=3$ non esse iusto maiorem) Nota prima dextima 1 est *millenaria*, vt patet, si ea computetur a Nota prima dextima 8 integri Cubi dati. Quia iam Summa 15507 potest subtrahi e Numero $D=166$[illegible], consequens est, secundam Notam radicalem $b=3$ non esse *iusto maiorem*. Nam si ea foret iusto maior, tres partes $3a^2b+3ab^2+b^3$, quas ea in cubo dat, & quae continentur in Numero D, deberent dare Summam maiorem, quam quae subtrahi posset a Numero D. Neque ea est *iusto minor*. Namque est, vt supponimus, in diuisione facti $3a^2b$ (i. e. Numeri|166) per $3a^2=48$ pro Quoto adsumta maxima, quae poterat, Nota radicalis. Ergo ita intelligitur, secundam Notam radicalem b esse *veram*. Pariter exinde liquet, si Summa trium partium, quas adsumpta secunda Nota radicalis b in Cubo praebet, fuerit maior, quam quae possit subtrahi a D, hanc ipsam alteram Notam radicalem b esse iusto maiorem, adeoque illam esse Vnitate minuendam, donec tentando deueniatur ad eiusmodi Notam radicalem, quae non sit iusto maior.

REGVLA IV. Residuo $E=1114$ iungatur tertia classis 568, & rursus binae vltimae eius Notae dextimae a reliquis virgula resecentur. Inuentae duae Notae radicales $43=430=a+b$

 fian

fiant, vt supra (11), $= A$, i. e. habeantur pro *vna*, ita, vt Nota radicalis adhuc inuenienda, & de se *tertia* $= c$ fiat respectu eius *secunda* $= B$. Erit iam a Cubo dato 80.621.568 $= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ ablatus Cubus primae Notae radicalis A, & hinc in residuo E continentur adhuc $3A^2B + 3AB^2 + B^3$. Et quidem in Nota vltima dextima 8 residui E continetur Cubus B^3, in penultima 6 est $3AB^2$, & in 11145 est $3A^2B$, id quod ex supra (Regula II) dictis facile intelligitur. Hinc igitur, vt obtineatur B, diuidatur $3A^2B$ i. e. Numerus 11145 per $3A^2$ i. e. per $3.(a+b)^2 = 3.(43)^2 = 5547$, & Quotus $B = c = 2$ est tertia radicalis Nota. Fiant iam denuo in N tres illae partes, quas Nota radicalis tertia in Cubo praebet, nimirum $3A^2B + 3AB^2 + B^3$. Erit $3A^2B = 11094$, & $3AB^2 = 516$, & $B^3 = 8$; hae partes sibi rursus subscribantur ita, vt Notae dextimae recedant vno loco versus dextram, vti in N videre est, & cuius Positionis ratio ex superioribus (Reg. III) liquet. Colligantur demum in Summam $= 1114568$, atque haec subtrahatur ex E i. e. ex classe tertia cum priore residuo. Cum iam nihil supersit, id indicio est, tertiam Notam radicalem c esse *veram*, i. e. nec iusto *maiorem* (alioquin subtrahi praefata Summa non potuisset a tertia classe cum priore residuo), nec *iusto minorem* (alioquin debuisset quidquam esse residui; & in diuisione facti $3A^2B$ per $3A^2$ non esset assumta, vti tamen posuimus, *maxima* pro quoto Nota radicalis). Eodem modo inuenirentur plures Notae radicales, si plures superessent classes, semper nimirum ponendo omnes iam inuentas Notas radicales $= A$, & inuenien-

ueniendam $= B$, & caetera peragendo, vt hactenus.

Regvla V. Quodsi in classis alicuius membro diuidendo $3A^2B$ diuisor $3A^2$ ne semel continetur, scribitur pro Nota radicali zerus, (vt supra *de quadrato* 18. Reg. V). Porro si inuentis vna vel pluribus Notis radicalibus supersint in Cubo solae classes meris zeris constantes, inuentis Notis radicalibus adiiciantur tot zeri, quot sunt classes meris zeris constantes (itidem vt supra de quadrato 18. Reg. VI). E. g. $\sqrt[3]{8.000.000}$ est $= 200$.

Demonstratio generalis Regularum hactenus datarum. Radix iuxta praefatas Regulas inuenta est eiusmodi, vt singulae partes illae, quas quaelibet Nota radicalis in Cubo dare debet, a dato Cubo subtractae nihil ex eo relinquant; ergo ea est legitima, adeoque & ipsae Regulae hactenus datae sunt varae.

20) Coroll. Examen extractae rite Radicis ex Cubo perfecto fit eleuando Radicem totam inuentam ad Cubum. Tunc enim si Radix inuenta est vera, Cubus eius debet adaequare datum Cubum *perfectum*, ex quo fuit extracta.

21) Coroll. Ex Potentiis *perfectis* altioribus Radix extrahitur simili modo, quo ex *quadratis*, & *Cubis* perfectis, dummodo modus iste, quem hactenus exposuimus, genesi cuiusque Potentiae datae altioris attemperetur.

22) De

22) Definitio. Potentia *imperfecta* est ea, in qua vel quidquam deest, vel abundat (9. 15). Intelligitur autem haec *imperfectio* ex eo, si extractis ex data Potentia vel vna, vel pluribus Notis radicalibus est quidquam residui, quin classis supersit, quae residuo huic eum in finem possit, debeatque adiici, vt noua Nota radicalis inueniatur. Sic e. g. 7 est quadratum imperfectum Numeri 2, quia, si quadratum numeri 2 subtrahitur e 7, remanet 3. Pariter 156 est quadratum imperfectum Radicis 12, quia, si quadratum de 12 subtrahitur ex 156, remanet 12, quin classis in quadrato 156 supersit, quae residuo 12 adiecta nouam & quidem talem Notam radicalem praebeat, vt Summa partium illarum, quas ea in quadrato dat, subtracta ex classe illa, residuo 12 adiecta, nihil relinquat. Atque in hoc casu notas inuentas radicales e. g. 12 esse legitimas, intelligitur equidem ex eo, si inuenta Radix 12 ad Potentiam datam eleuata, & residuo 12 per additionem aucta restituerit Potentiam datam *): ast vera Radix i. e. eiusmodi nunquam inuenitur, quae ad Potentiam datam eleuata exhauriat ipsam Potentiam datam. Namque

23) Theorema. *Potentiae imperfectae, quae sit numerus integer, Radix in rigore vera non est possibilis.*

De-

---

*) Examen autem isthoc tunc demum certum est, si assumta est Nota radicalis, quae adsumi poterat, *maxima*; secus illud fallit. Vt si extrahas ex quadrato 8765 Radicem 89, remanebunt 844, quae addita quadrato Radicis restituunt Numerum 8765, & tamen falsa est Radix 89, vera haec 93. Cl. Hvberti Arithmetica pag. 91.

Demonstratio. Si ea foret possibilis, deberet esse vel Numerus *integer*, vel *fractus*, vel ex integro & fracto *mixtus*. Iam vero 1) esse ea non potest Numerus *integer*. Namque quiuis Numerus integer secum ipso toties multiplicatus, quoties Exponens Potentiae datae Vnitate multatus indicat, dat semper Potentiam *perfectam*, vti ex genesi Potentiarum perfectarum liquet. 2) Esse ea non potest *Fractio propria*. Namque fractio propria ad quamcunque Potentiam eleuata dare non potest Numerum *integrum*, eo quod fractio illa per semetipsam multiplicata (per semetipsam autem debet multiplicari, vt Potentia *secunda*, *tertia* &c. oriatur) semper dat factum multiplicando minus, vti liquet ex superius dictis (Differt. I. Artic. II. Nro. XXXIX). Ergo cum fractio propria *multiplicanda* iam sit minor Numero integro (ex Definitione), multo magis adhuc eiusdem *Quadratum*, *Cubus* &c. debet esse minor Numero integro, adeoque eiusmodi Potentiae imperfectae Radix vera non potest esse *fractio propria*. 3) Esse ea non potest Numerus *ex integro & fracto mixtus*. Namque quilibet eiusmodi Numerus mixtus potest vocari $= a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$. Sed quantitas haec $\frac{ac+b}{c}$ ad quamcunque Potentiam eleuata dare nequit Numerum integrum. Namque deberet denominator c ad Potentiam datam eleuatus *metiri* numeratorem $ac+b$ ad eandem pariter Potentiam eleuatum, vt pro quoto prouenire posset Numerus *integer*. Sed vt Denominator c ad Potentiam datam eleuatus metiatur Numeratorem

torem $ac+b$ ad eandem Potentiam datam eleuatum, in diuidendo debent omnes factores Diuisoris contineri (id quod fluit ex natura Diuisionis), adeoque & c deberet metiri $ac+b$, quod tamen sumtioni repugnat. Ergo Radix illa esse non potest Numerus mixtus. *)

24) Definitio. Radix vera Potentiae imperfectae e. g. quadrati imperfecti 10, quae nec est Numerus *integer*, nec *fractus*, nec ex *integro* & *fracto mixtus*, dicitur Numerus *irrationalis* aut *surdus*, eoquod nullis Numeris potest definiri, qualis pars dati quadrati sit huius Radix vera. Nimirum cum sit e. g. $\sqrt{7} < 3$ & > 2 (nam $3^2 = 9$ & $2^2 = 4$), & ex demonstratis (23) haec Radix de 7 etiam esse non possit vel *fractio*, vel *integer* 2 cum adhaerente aliqua fractione, consequens est, vt Radix ista debeat esse quantitas quaedam, quae non per eandem *Vnitatem* mensurabilis sit, de qua in Potentia data sermo est. E. g. si quadratum 7 denotet *pedes*, Radix de 7 mensurari exacte non potest per *pedes*, vel aliquotas partes *pedis*. Atque eiusmodi quantitates, quae non possunt per eandem Vnitatem (Mass) exacte mensurari, dicuntur *incommensurabiles*, quarum exempla in rerum natura non desunt. Sic e. g. si magnitudo duorum hominum non possit exacte mensurari eadem mensura, v. g. pedibus, digitis &c. habentur Quantitates incommensurabiles.

25) Theo-

*) Conf. Hvberti l. c. §. 79. & Abel Burja Selbstlernender Algebraist. I Th. Berlin und Libau bey Lagarde und Fridrich 1786.

25) Theorema. Quanquam Potentiae imperfectae non sit Radix in rigore vera possibilis, potest tamen Radix verae sine fine propior inueniri i. e. potest inueniri Radix verae tam propinqua, vt defectus, qui subest, possit citra errorem sensibilem ceu Nihilum sperni.

Demonstratio. Potentiae datae imperfectae possunt, saluo illius valore, adiici quotcunque classes zerorum decimalium, quarum classium quaelibet tot zeros decimales contineat, quot Vnitates sunt in Exponente Potentiae datae. Nam Numero cuilibet *radicali* adiici possunt, saluo illius valore, quotcunque zeri decimales, vti ex Theoria fractionum decimalium constat: quilibet autem zerus decimalis, Radici adiectus, dat in Potentia vnam classem, tot zeris decimalibus constantem, quot Vnitates sunt in Exponente Potentiae datae (vti liquet ex Multiplicatione decimalium); ergo sicuti zeri decimales Radici adiecti non mutant huius valorem, ita neque classes zerorum decimalium, quarum quaelibet tot zeris decimalibus constet, quot sunt Vnitates in Exponente Potentiae datae, adiectae huic ipsi Potentiae datae mutant eius valorem. Ita e. g. est Radix 7 = 7.0 = 7.00 = 7.000 &c. & quadratum eius = 49 = 49.00 = 49.00.00 = 49.00.00.00. & Cubus de 7 est = 343 = 343.000 = 343.000.000 = 343.000.000.000 &c.*)

Vt

*) Si Potentia data imperfecta sit integer cum fractis decimalibus, sed hae Notae decimales sint pauciores, quam vt iuxta Theorema 16 in classes diuidi queant, quarum quaelibet tot Notas decimales contineat, quot sunt Vnitates in Exponente Potentiae datae, adiiciantur

Vt iam igitur ex Potentia data imperfecta extrahatur Radix verae semper propior, adiiciantur illi quotcunque classes zerorum decimalium, quarum quaelibet tot zeros decimales contineat, quot Vnitates sunt in Exponente Potentiae datae, & extrahatur dein iuxta Regulas praecedentes Radix, donec deueniatur ad Notam decimalem nullius momenti. Tot autem in Radice erunt Notae decimales, quot sunt Potentiae datae zerorum decimalium classes adiectae. Sic, e. g. si quadrato imperfecto 12 adiicias duas zerorum decimalium classes, vt fiat 12.00.00, prodibit Radix 3.46, quae nequidem vna parte centesima minor est Radice vera. Similiter reperitur $\sqrt{5} = \sqrt{5.00.00.00} = 2,236$, quae Radix a vera nequidem vna parte millesima deficit. Quia ergo nonae semper zerorum decimalium classes possunt residuo adiici, hinc Radix quoque verae sine fine propior potest inueniri. Atque eiusmodi Radix per *adproximationem* inuenta dicitur.

26) PROBLEMA. *Extrahere Radices ex Potentiis datis*

b) *literalibus.*

Resolutio. Si Potentia data literalis sit *monomia*, diuidatur exponens cuiuslibet Notae in Potentia literali per exponentem Radicis quaesitae, &

---

tur illis zeri decimales tot, quot requiruntur, vt praefata diuisio in classes fieri possit. Namque ex superioribus liquet, classes zerorum decimalium semper esse integras, adeoque si detur talis Potentia, vbi classes istae non sunt integrae, compleri debent adiectis zeris. E. g. quadratum 2,462 fiat = 2,46.20 & Cubus 22,3 fiat = 22.300. = 22.300.000.

& habetur ipsa Radix quaesita. Namque omnis Potentia monomia literalis potest repraesentari per a^m, & omnis radix extrahenda ex Potentia monomia literali per $\sqrt[n]{a^m}$. Iam vero est $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (Diff. II. 4): ergo. Similiter est $\sqrt[n]{a^m b^r} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}}$, eoquod est $\left(a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{r}{n}}\right)^n = a^{\frac{mn}{n}} b^{\frac{rn}{n}} = a^m b^r$. Hinc $\sqrt[2]{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$ & $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. & $\sqrt{a^2 b^4 c^n} = ab^2 c^{\frac{n}{2}}$.

Quodsi vero Potentia data literalis sit *polynomia*; Radix iuxta sequentes Regulas extrahatur.

REGVLA I. Ordinetur Potentia data secundum Exponentes cuiusdam Literae, ita, vt litera haec Exponentis maximi primum locum obtineat. E. g. Si data sit Potentia secunda isthaec $30ab + 9b^2 + 25a^2$, ordinetur ea inprimis secundum Exponentes literae *a*, vt fiat $25a^2 + 30ab + 9b^2$.

REGVLA II. Ex Termino primo $25a^2$ extrahatur iam Radix quadrata iuxta methodum, ex Potentia *monomia* Radicem extrahendi mox expositam: erit haec Radix $= \pm 5a$. Eleuetur iam rursus $\pm 5a$ ad quadratum $= 25a^2$, & subtrahatur hoc e quadrati dati Termino primo $25a^2$. Residuum ex toto quadrato erit $= 30ab + 9b^2$.

REGVLA III. In Residuo hoc latent iam adhuc duae illae partes, quas quaelibet secunda Nota radicalis *b* in quadrato dare debet, nimirum $2ab + b^2$. & quidem in $30ab$ est $2ab$ i. e. *duplum*

factum

factum ex Nota radicali prima iam inuenta in secundam: & $9b^2$ *est quadratum secundae Notae radicalis*. Nam duplum factum ex Nota radicali prima in secundam debet contineri in illo Termino, in quo occurrit prima Nota radicalis, & quadratum secundae Notae radicalis debet esse in illo Termino, in quo Nota radicalis prima non occurrit, eoquod in quadrato Notae radicalis secundae nunquam occurrere potest Nota radicalis prima. Diuidatur iam igitur $30ab$ per duplum Termini primi radicalis, nimirum per $\pm 10a$, erit $\frac{30ab}{\pm 10a} =$ $= \pm 3b$. Igitur erit altera Nota radicalis $= \pm 3b$.

Regvla IV. Vt iam pateat, illam esse legitimam, fiant duae illae partes, quas ea in quadrato dare debet, nimirum 1) *duplum eius factum in primam*, & 2) *quadratum eius*. Erunt hae partes $= 30ab + 9b^2$, quae subtractae ex priori residuo nihil relinquunt. Radix ergo quaesita est $\pm 5a \pm 3b$. Similiter si data sit Potentia isthaec quadrata

$$16ab^2x + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 8ax^3 + 4x^4 + 16b^4$$

1) Ea ordinetur iuxta exponentes literae x ita, vt Positio sit

$$= 4x^4 + 8ax^3 + 4a^2x^2 + 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$$

Quia iam plures quam tres Termini adsunt, Radix quoque plurium, quam duorum, Terminorum erit. Nam Radix *binomia* quaeque $a+b$ in quadrato tres tantum Terminos praebet, videlicet $a^2 + 2ab + b^2$.

b)

2) Extrahatur ex Termino primo $4x^4$ Radix. Erit haec $= 2x^2$. Fiat iam quadratum de $2x^2$, & subtrahatur illud $= 4x^4$ a Termino primo quadrati dati, nimirum a $4x^4$, & residuum erit $= 0$.

3) Quia iam dempto quadrato Termini primi radicalis sequitur duplum factum ex Nota radicali prima in secundam, & quadratum secundae erit $8ax^3$ duplum istud factum, & $4a^2x^2$ quadratum Notae secundae radicalis. Hinc $8ax^3$ diuidatur per duplum Termini primi radicalis iam inuenti, quod est $= 4x^2$, & quotus $\frac{8ax^3}{4x^2} = 2ax$ erit altera radicalis Nota.

4) Fiant iam duae illae partes, quas quaelibet secunda Nota radicalis in quadrato praebet. Erunt hae $= 8ax^3 + 4a^2x^2$, atque hae subtrahantur e residuo quadrati dati: remanet ex toto quadrato $16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$.

5) Quia iam, si ex quadrato dato perfecto & rite ordinato subtractum est quadratum duarum Notarum radicalium, sequitur duplum factum ex Nota radicali tertia in duas praecedentes, & quadratum tertiae, necessario erit in $16b^2x^2 + 16ab^2x$ duplum illud factum, & in $16b^4$ quadratum tertiae Notae radicalis. Diuidatur iam igitur illud duplum factum per duplum duarum Notarum radicalium iam inuentarum, quod est $= 4x^2 + 4ax$, & quotus $\frac{16b^2x^2 + 16ab^2x}{4x^2 + 4ax} = 4b^2$ erit tertia Nota radicalis quaesita.

f)

6) Fiant iam iterum partes illae, quas quaelibet Nota radicalis tertia in quadrato praebet, nimirum $2 . (2x^2 + 2ax) . 4b^2 + 16b^4 = 16b^2x^2 + 16ab^2x + 16b^4$, atque cum partes hae ex residuo quadrati dati subtractae ex toto quadrato nihil relinquant, consequens est, vt Radix inuenta $2x^2 + 2ax + 4b^2$ sit legitima.

27) Coroll. Simili modo Radix extrahitur ex *Cubo*, & generatim ex quacunque altiore Potentia literali perfecta, dummodo modus iste cuiusque Potentiae indoli attemperetur.

28) Coroll. Siquid peracta operatione est residui; Potentia data erit *imperfecta*. E. g. $d^2 + x^2$. Atque qua ratione ex Potentiis imperfectis literaribus Radix per adproximationem extrahi possit, infra (Differt. VI.) dicetur.

29) Problema. Ex fractione, quae Potentia perfecta sit, extrahere Radicem.

Resol. Extrahatur Radix tam ex Numeratore, quam Denominatore iuxta Regulas praecedentes, & habebitur Radix totius Potentiae datae.

Demonst. Vt fractio eleuetur ad Potentiam, ad eam tam Numerator, quam Denominator est eleuandus vi multiplicationis fractionis per semetipsam. Ergo etiam si Radix ex fractione quadam sit extrahenda, tam ex Numeratore quam Denominatore est extrahenda. E. g. est $\sqrt[n]{\frac{a^m}{b^r}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{r}{n}}}$ & $\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

DISSER-

DISSERTATIO III.
DE
PROBLEMATIS, ET AEQVATIONIBVS, AD ALGEBRAM ELEMENTAREM PERTINENTIBVS.

CAPVT I.
DE NATVRA PROBLEMATVM ET AEQVATIONVM GENERATIM.

I. DEFINITIO. Quantitas, cuius valor determinatus est, dicitur *cognita*, siue *data*; ea vero, cuius valor definitus non est, *incognita* audit. Petere, vt ex datis quibusdam Quantitatibus valor vnius, vel plurium incognitarum eruatur, est hoc loco *Problema* proponere. Problema ergo hic *Propositionem* denotat, *qua petitur, vt ex cognitis quibusdam Quantitatibus valor vnius, vel plurium incognitarum eruatur.* *) E. g. Inuenire Numerum x, qui ductus in 30, & Numero 10 auctus det Numerum 140. Valorem incognitae ex cognitis inuenire, est Problema *soluere*.

II.

*) Cl. Paul. MAKO Compend. Mathes. Institutio. Edit. 4ta §. 148. & Cl. TRENTEL Compendium Algebrae element. §. 125.

II. Coroll. Quia ergo valor incognitarum ex *cognitis* erui debet, consequens est, vt inter Quantitates *datas* & *quaesitas* debeant intercedere quaedam Relationes, siue certus inter eas Nexus adesse debeat. Namque si nullus inter eas Nexus intercedit, fieri etiam non potest, vt *incognitae* ex *datis* eruantur. E. g. Siquis vellet Problema isthoc proponere: Tres librae sacchari constant 180 crucigeris, & quatuor librae stanni veneunt florenis 6, quanta iam est distantia Bambergam inter & Wirceburgum? merito rideretur, quia inter datas quantitates & quaesitam nulla intercedit relatio. Relationes ergo, quae inter data, & quaesita intercedunt, quia sine iis Problema solui non potest, recte dicuntur Problematis *Conditiones*.

III. Definitio. Quaelibet *Conditio* inuoluit *aequationem, quae in duplici eiusdem Quantitatis Expressione consistit.* *) E. g. Si proponatur quaerendus Numerus $= x$, qui suo triplo auctus det Numerum $= 16$, euidens est, in conditione adiecta „*vt triplum eiusdem Numeri, ipsi Numero additum, det Numerum* 16„ inuolui *aequationem*, siue *aequalitatem*, quam Numerus ille, suo triplo auctus, habeat cum Numero 16. Atque haec aequatio exprimitur per $x + 3x = 16$. Ipsae duae eiusdem Quantitatis Expressiones, quas inter signum aequalitatis interiacet, dicuntur *Membra* aequationis (Seiten der Gleichung) & vtriusque Membri partes, signo

*) Quodsi non *aequalitas*, sed *Proportio* tantum inuoluatur in aliqua Problematis conditione, tum facile, si fiat factum extremorum aequale facto mediorum, Proportio data mutabitur in aequationem, vti ex Theoria Proportionum constat. P. Mako l. c. §. 150.

signo + & — connexae vocantur *Termini* eiusdem (Glieder).

IV. DEFINITIO. *Algebra* [quam alii * quoque Arithmeticam *cossicam* ** vocant] est ea Arithmetices pars, quae incognitas Quantitates ex datis conditionibus, ope aequationum, inueniendi, i. e. Problemata ope aequationum soluendi, Principia tradit.

V. DEFINITIO. *Problema* (similiter & *aequatio*) est vel gradus *puri*, vel *adfecti* siue *mixti*. Pro-

*) Vid. Cl. HVBERTI Institut. arithmeticae Francofurti ad M. & Moguntiae 1753 pag. 1.

**) „Der Name *Coss*, den die Algebra vor Zeiten führte, kommt vermuthlich vom *italiaenischen* Worte *Cosa* — *ein Ding* —, und rühret wahrscheinlich daher, dass man der unbekannten Grösse, die man suchte, und mit einem besonderen Zeichen bemerkte, keinen anderen Namen zu geben wusste, als „*das unbekannte Ding*". In einigen alten Büchern wird die *Incognita* durch R (vermuthlich soviel als *res*) angezeiget. — Ferner der Name *Algebra* ist gewiss *arabischen* Ursprunges, wie viele anderen Kunstwörter, die mit *al* anfangen, als *almanach*, *alkali*, *almukantarat* &c. Die Araber hatten im Mittelalter viele Wissenschaften aus griechischen Schriften erlernet, und haben sie hernach zum Theile in Spanien, und anderen Europäischen Gegenden bekannt gemacht, bis dass wir die griechischen Quellen selbst erhalten haben. Uebrigens ist die wahre Abstammung des Wortes *al-gebra* bis daher unbekannt. „Abel BÜRJA Selbstlernender Algebrist, oder „deutliche Anweisung zur ganzen Rechenkunst, wor„unter sowohl die Arithmetik, und gemeine „Algebra, als auch die Differential- und Integral„Rechnung begriffen ist." I Th. Vorrede XII XIII.

Problema siue aequatio gradus *puri* habetur, si incognita in vnico tantum Exponente occurrit. E. g. $x^m + 2bx^m = c$. Et prout Exponens ille vnicus Incognitae est, vel $= 1$, vel $= 2, 3, 4 \ldots m$, Problema ipsum dicitur Problema gradus puri vel *primi*, vel *secundi*, vel *tertii*, vel *quarti*, vel generaliter *mesimi*. Problema autem (similiter & aequatio) gradus *adfecti*, siue *mixti* habetur, si Incognitae Exponentes diuersi sunt. Atque hoc genus *Problemata* & *aequationes* sunt *gradus adfecti secundi*, si incognitae eiusdem Exponens minimus est dimidium maximi: secus nomen sortiuntur ab Exponente maximo Incognitae. E. g. Aequatio haec ,, $x^2 + 2ax = b$, siue generaliter $x^m + 2ax^{\frac{m}{2}} = b$ est aequatio gradus adfecti *secundi*, & qui petit, vt ex ea inueniatur valor Incognitae x, Problema gradus adfecti *secundi* proponit. Aequatio autem ista ,, $x^3 + 2ax - b = c$,, est *tertii* gradus adfecti, & qui petit, vt ex ea inueniatur x, Problema *tertii* gradus *mixti* proponit. Aequatio gradus puri *primi* etiam *simplex*, & altioris gradus siue *puri*, siue *mixti* *composita* compellatur. *)

VI. Definitio. Algebra, quatenus Problematum cuiusque *gradus puri*, & solius tantum gradus secundi *adfecti*, ope aequationum, resoluendorum scientia est, dicitur *elementaris*; quatenus vero circa solutionem Problematum gradus adfecti *secundo* altioris versatur, *sublimior* audit. Nos in sequen-

---

*) Cl. Lorenz Elemente der Mathematik I Theil. 2te Ausgabe. Leipzig 1793. Algebra §. 10. 26.

ſequentibus ſolius *elementaris* Algebrae Principia exponemus.

VII. DEFINITIO. Problema porro dicitur *determinatum* (beſtimmt), ſi vel vnicus tantum valor incognitae quantitatis, quaeſtioni ſatisfaciens eſt, vel certe determinatus valorum numerus. Quod quia tunc obtinet, ſi tot adſint *aequationes*, quot *incognitae*, Problema *determinatum* definiri etiam ſolet illud, in quo tot adſunt aequationes, quot incognitae. *Indeterminatum* vero Problema dicitur, quod innumeras admittit ſolutiones, ſeu vbi infinite multi ſunt valores, qui pro quantitatibus incognitis ſubſtituti quaeſtioni ſatisfaciunt. Et quia hoc tunc euenit, ſi plures ſint *incognitae*, *a ſe non dependentes*, (i. e. tales, quarum vna inuenta, non hoc ipſo innoteſcit altera) quam *aequationes*, Problema *indeterminatum* definitur etiam illud, in quo plures ſunt incognitae, a ſe non dependentes, quam aequationes.*) E. g. ſi quaerantur duo Numeri x, & y, quorum Summa ſit $= 8$, erit Problema *indeterminatum*, cum eiusmodi Numeri infiniti eſſe poſſint, Nam $2+6=8$, $7+1=8$, $7\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=8$, $7\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=8$ &c. Aſt ſi addatur,

*) Subinde videntur adeſſe *duae incognitae*, cum tamen reapſe nonniſi vnica adſit, ſi nimirum altera incognita mox intelligatur, ſi *prima* eſt inuenta. E. g. Problema hoc „inuenire duos numeros, quorum Summa ſit $= 12$, & quorum alter ſit alterius dimidium“ habet vnicam *incognitam* x, qua inuenta ſcitur & alter quaeſitus Numerus $= \frac{x}{2}$. Eſt ergo Problema *determinatum*.

datur, eorundem Numerorum differentiam esse $=4$, iam adiecta haec altera conditio Problema determinat, nec iam satisfaciunt quaestioni vlli alii Numeri, quam 6 & 2 (id quod ex sequentibus patebit). Tandem Problema dicitur *plusquam determinatum*, si aequationes plures fuerint, quam incognitae, & nisi accidat, vt determinatis incognitarum valoribus reliquae etiam redundantes aequationes verificentur, Problema ipsum inuoluet repugnantiam. E. g. Problema istud est *plusquam determinatum* „inuenire duos numeros x & y, quorum differentia sit $d=3$ & Summa $s=15$, & maior x *sit* aequalis quadrato differentiae eorundem $=d^2$. Erunt enim duae *incognitae* & tres aequationes, videlicet I) $x-y=d$, II) $x+y=s$, III) $x=d^2$ ex duabus primis aequationibus iuxta Regulas, infra recensendas, obtinetur $x=9$ & $y=6$, & iam in repertis hisce Numeris conditio tertia casu verificatur, cum sit differentia inuentorum Numerorum $=3$, & quadratum huius $=9=x$. Ast si pro praefata tertia conditione adderes istam, vt ambo Numeri sint *pares*, Problema repugnantiam inuolueret, cum repugnet, vt duo Numeri pares efficiant Summam imparem 15.*)

VIII. Problema. Incognitam quantitatem ex datis conditionibus ope aequationis inuenire.

Resolutio. 1) *Formetur aequatio.* Aequationem autem formaturus a) quantitates datas a quaesitis probe discernat, *illasque* literis alphabeti minoribus,

*) P. Mako Compendiaria Matheseos Institutio — elementa Algebrae §. 148 — 156.

bus, & initialibus *a*, *b*, *c*, *d*, &c. vel ciffris; has vero literis alphabeti finalibus v, w, x, y, z signet. b) Connexionem incognitarum cum cognitis, ope signorum arithmeticorum iuxta conditiones datas definiat, & exinde c) Aequationem deducat. Plures, aequationem formandi, Regulas Algebra non tradit, nec tradere potest. Namque conditiones Problematum possunt esse diuersissimae, adeoque modus generalis, aequationem formandi, adsignari non potest, sed propria cuiusque in Problematis propositi conditiones conuersa reflexio, exercitio iuncta, formationem cuiusque aequationis specialis dictitare debet.

2). *Formata* aequatio *reducatur*, i. e. in aliam, sed *simplicioris* formae aequationem mutetur. *Simplicior* autem aequationi forma conciliatur, si a) fractiones, quae in formata aequatione occurrunt, tollantur, b) Termini eandem incognitam continentes, si in vtroque formatae aequationis membro occurrant, in vnum membrum transferantur, c) Incognita, si sub signo quodam radicali fuerit, ab eodem liberetur.

3) *Reducta* aequatio *soluatur*, i. e. eousque porro pertractetur, vt tandem incognita in vno membro sit *sola*, & *positiua*, & in altero merae cognitae occurrant. Atque vt haec duo posteriora rite paragantur, sequens *Axioma* vna cum Corollariis operationem dirigat, necesse est. *)

IX. Axioma.

*) Cl. Lorenz l. c. §. 3—5.

IX. Axioma. Aequatio manet, si, quae in altero membro facta est mutatio, eadem etiam fiat in altero; i. e. si vtrique membro aequationis formatae idem vel additur, vel idem ab vtroque subtrahitur, vel vtrumque per eandem quantitatem tertiam aut multiplicetur, aut diuidatur, vel vtrumque eleuetur ad eandem Potentiam, vel ex vtroque extrahatur eadem Radix, semper manet aequatio. *) Vnde

X. Coroll. Vt incognita, quae vel per *additionem*, vel per *subtractionem* cum cognitis connexa est, habeatur in vno membro *sola*, cognitae omnes transferantur cum signo contrario in alterum membrum aequationis, quam Transpositionem *Metathesin* vocant. E. g. si data sit aequatio $x+ab-c=d$, erit $x=d-ab+c$. Nam si ex vtroque datae aequationis membro subtrahatur idem tertium, videlicet cognitae $ab-c$, quibuscum incognita per additionem & subtractionem est connexa, prouenit $x+ab-c-ab+c=d-ab+c$, i. e. $x=d-ab+c$. Pariter si datum sit $-x=b-c$, mutatis vtrinque signis, est $x=c-b$. Nam si rursus ex vtroque datae aequationis membro subtrahatur idem tertium, videlicet $-x+b-c$, prouenit $-x+x-b+c=b-c+x-b+c$ i. e. $c-b=x$. Ita quoque, si sit $-x=-b$ erit $x=b$. Subtracto enim ex vtroque datae aequationis membro eodem Tertio $-x-b$, prouenit $-x+x+b=-b+x+b$ i. e. $b=x$. Vnde signa omnium Terminorum vtriusque membri aequationis, salua aequatione, mutari possunt in contraria; & quaelibet aequatio reducitur ad 0, si alterius

*) Lorenz l. c.

rius membri omnes Termini cum ſigno contrario transferantur in alterum. E. g. ſi ſit $x + b = c$, erit $x + b - c = o$.

XI. Coroll. Vt incognita cognitis per *Multiplicationem* implexa ab his ſeparetur, ſinguli vtriusque membri aequationis Termini per ipſas illas cognitas diuidantur. E. g. ſi data ſit aequatio $ax + bx + cx - d = m$, fiat inprimis per *Metatheſin* $ax + bx + cx = m + d$, deinde diuidatur vtrumque membrum per $a + b + c$, & erit $\frac{ax+bx+cx}{a+b+c} = x\frac{(a+b+c)}{a+b+c} = \frac{m+d}{a+b+c}$ i. e. $x = \frac{m+d}{a+b+c}$. Ratio huius Regulae ex Axiomate ſuperiore (IX) intelligitur. Namque diuiſio eſt repetita ſubtractio. Si vero ab aequalibus aequalia auferuntur, remanent aequalia: ergo etiam ſi vtrumque datae aequationis membrum diuidatur per eandem tertiam quantitatem, debent rurſus prouenire aequalia.

XII. Coroll. Vt incognita, cognitis per *Diuiſionem* implexa, *ſola* habeatur, ſinguli vtriusque membri Termini multiplicentur per Denominatorem fractionis illius, cuius vel Numerator vel Denominator ipſa eſt incognita. E. g. Si data ſit aequatio $\frac{x}{m} + \frac{bx}{n} = f$, fiat inprimis $\frac{xm}{m} + \frac{bxm}{n} = fm$ i. e. $x + \frac{bxm}{n} = fm$. Multiplicando dein

vtrum-

vtrumque membrum per n, erit $nx + bxm = fmn$ siue $x(n+bm) = fmn$, atque iam diuidendo vtrumque membrum per $n+bm$ (praeced.) obtinetur $x = \frac{fmn}{n+bm}$. Pariter si sit $\frac{a}{x} = c$, erit $a = cx$, & hinc $x = \frac{a}{c}$. Patet inde modus, fractiones in aequatione data occurrentes tollendi. Ratio autem huius Regulae rursus ex Axiomate superiore (IX) intelligitur. Nam Multiplicatio est repetita additio : si autem aequalia aequalibus addis, quae proueniunt, sunt aequalia ; ergo etiam, si vtrumque datae aequationis membrum per eandem quantitatem tertiam multiplicas, quae proueniunt, debent esse aequalia.

XIII. Coroll. Vt incognita, quae in vno membro sub signo radicali est, habeatur sine signo radicali, vtrumque membrum eleuetur ad Potentiam, quam indicat Exponens signi radicalis. E. g. Si sit $\sqrt[m]{x} = b$, erit $x = b^m$. Nam cum sit $\sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$ (Differt. II. 4), hinc substituendo, data aequatio $\sqrt[m]{x} = b$ abit in hanc $x^{\frac{1}{m}} = b$. Euehendo iam vtrumque membrum ad Potentiam *mesimam*, obtinetur $x^{\frac{m}{m}} = x = b^m$. Pariter si sit $\sqrt[n]{ax}) - b = c$, fiat inprimis per Metathesin $\sqrt[n]{ax} = c+b$. Vtrumque membrum dein eleuando ad Potentiam *nesimam*, obti-

obtinetur $ax = (c + - b)^n$, & hinc $x = \frac{(c + - b)^n}{a}$ (IX).

XIV. Coroll. Quodsi incognita est sola in vno membro, sed ad Poteutiam aliquam euecta, ex vtroque membro extrahatur Radix eiusdem Potentiae. E. g. Si sit $ax^2 + - b - c = f$, fiat inprimis per Metathesin $ax^2 = f - b + - c$, dein per Diuisionem fiat $x^2 = \frac{f - b + - c}{a}$, & iam vtrinque extrahendo Radicem quadratam obtinetur $x = \sqrt{\left(\frac{f - b + - c}{a}\right)}$. Pariter si sit $a\sqrt[n]{bx^2} = c$, erit 1) $\sqrt[n]{bx^2} = \frac{c}{a}$ 2) $bx^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^n$ 3) $x^2 = \frac{(c : a)^n}{b}$ & 4) $x = \sqrt{\left(\frac{(c : a)^n}{b}\right)}$.

Scholion. Ope harum Regularum facile soluuntur omnia Problemata *determinata*, quae ad aequationes tam *simplices*, quam *compositas gradus puri* reducuntur, vti ex sequentibus liquet.

Capvt

CAPVT II.

DE RESOLVTIONE PROBLEMATVM SPECIATIM.

ARTICVLVS I.

De Resolutione Problematum determinatorum, quae ad aequationes tam simplices, quam compositas gradus puri reducuntur.

XV. PROBLEMA. *Aequationem simplicem, in qua vnica tantum incognita occurrit, resoluere.*

Resolutio. 1) Tollantur ante omnia Fractiones, siquae in membris datae vel formatae aequationis occurrant (XII), & si dein Termini omnes vtriusque membri sint multiplicati per aliquam quantitatem eiusdem, vel diuersi Exponentis, Termini singuli diuidantur per illam quantitatem minimi Exponentis. E. g. Si sit $\frac{ax}{b} + \frac{a^2x}{c} + a^3 = 4a^2$, fiat *inprimis* $ax + \frac{a^2bx}{c} + a^3b = 4a^2b$. *Dein* $acx + a^2bx + a^3bc = 4a^2bc$. Diuidendo iam singulos Terminos per a obtinetur $cx + abx + a^2bc = 4abc$. Et per Metathesin est $cx + abx = 4abc - a^2bc$ & hinc $x = \frac{4abc - a^2bc}{c + ab}$. 2) Quodsi in vtroque membro occurrant Termini, quantitatem incognitam continentes, transferantur in illud membrum, in quo, facta reductione, incognita euadit *positiua*.

positiua, & cognitae omnes, quae vel signo + vel — cum incognitis connexae sunt, mutatis signis in membrum alterum coniiciantur. Ratio, cur incognita debeat fieri *positiua*, in eo est, quia, qui valorem incognitae x vel y ex aequatione eruendum desiderat, quaerit, quid sit + x non vero, quid sit — x. Demum si incognita, in vno membro posita, sit adhuc implexa cognitis per Multiplicationem, diuidatur vtrumque membrum per omnes hasce cognitas, quae *incognitae* coefficientes sunt. E. g. Si sit $5x + b = c + 7x$, erit $b - c = 7x - 5x = 2x$. Inde $x = \frac{b - c}{2}$. Pariter si sit $ax + d = bx + c$, & si sit $a > b$, erit $ax - bx = c - d$, & inde $x = \frac{c - d}{a - b}$. 3) Tandem si incognita sit in vno membro sola, sed vel sub signo radicali, vel ad Potentiam aliquam euecta, procedatur iuxta dicta superius (XIII. XIV). *)

Exempla.

XVI. *Exemplum* 1. Caius interrogatus a Titio, quot poma ex arbore decerpserit, si ea, respondet, inter tres ita diuisero, vt primus accipiat eorum dimidium, & insuper vnum; secundus iterum residui dimidium, & insuper vnum, & tertius denuo residui dimidium, & insuper tria, nihil remanet; quaerito iam ipse, quot poma decerpserim?

Rese-

*) Paul. Mako loc. cit. §. 165.

Resolutio. Numerus pomorum si dicatur $= x$, portio primi est $= \frac{x}{2} + 1$, & iam Caio supersunt poma $x - \frac{x}{2} - 1 = \frac{x}{2} - 1$. Proinde portio secundi est $= \frac{x}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{x}{4} + \frac{1}{2}$, & iam remanent Caio poma $\frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{4} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4} - \frac{3}{2}$. Hinc portio tertii fit $= \frac{x}{8} - \frac{3}{4} + 3 = \frac{x}{8} + \frac{9}{4}$. Est autem ex conditione data $\frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} + \frac{x}{8} + \frac{9}{4} = x$. Igitur tollendo fractiones est 1) $x + 2 + \frac{2x}{4} + \frac{2}{2} + \frac{2x}{8} + \frac{18}{4} = 2x$ vel $x + 2 + \frac{x}{2} + 1 + \frac{x}{4} + \frac{18}{4} = 2x$ 2) $2x + 4 + x + 2 + \frac{x}{2} + \frac{36}{4} = 4x$. 3) $4x + 8 + 2x + 4 + x + 18 = 8x$. Et iam reducendo fit $7x + 30 = 8x$. Hinc $30 = 8x - 7x = x$. Legitime inuentam esse incognitam x, ex eo liquet, quia satisfacit Problematis conditioni datae, siue rite formatae aequationi, vt tentanti patebit.

XVII. *Exemplum* 2. Sit massa argenti $= A$, cuius quaeuis marca contineat argenti lothones $= a$ *) & massa $= B$, cuius quaeuis marca contineat

*) Ab Aurifabris & Monetariis pondera auri & argenti de-

neat argenti puri lothones $=b$. Componenda est ex his massa dati ponderis $=m$, cuius marca contineat argenti lothones $=c$. Quaeritur, quantum ex *A*, & quantum ex *B* accipiendum?

Resol. Ex *A* si sumatur x, ex *B* erit accipiendum $m-x$. Est iam argentum in $x=ax$, & in $m-x=bm-bx$; ex conditione data vero debet esse $ax+bm-bx=cm$. Igitur $ax-bx=cm-bm$ $=m.(c-b)$. Hinc $x=m.\frac{c-b}{a-b}$. Vbi per se patet, c esse medium inter a & b.

XVIII. *Exempl.* 3. Sit vas vini *A*, cuius quaeuis vrna veneat florenis $=a$, & vas vini *B*, cuius vrna constet florenis $=b$. Miscenda ex his quantitas vrnarum $=m$, cuius quaeuis vrna veneat florenis

---

denominantur penes *Semilibras* seu *Marcas*. Continet autem *Marca* Semiuncias 16, quas cum vulgo vocabimus *Lothones*. Quodsi audias compellari argentum 16, 15, 14 &c. *Lothonum* (16 löthiges, 15 löthiges, 14 löthiges Silber &c.), intellige, Marcam primi continere argenti Lothones 16, adeoque hoc argentum esse *purum* i. e. non cum alio metallo mixtum: at Marca altera 15 Lothonum continet 15 Lothones argenti, & vnam aeris, seu cupri: Marca 14 Lothonum continet argenti Lothones 14, aeris 2, & sic porro. Ita & datur aurum 16 Lothonum seu purum, item aliud 15, 14, 13 &c. Lothonum, in cuius Marca sunt Lothones 15, 14, 13 &c. auri & 1, 2, 3 &c. Lothones argenti, vbi tamen argento tantillum aeris adhuc est admixtum. Porro Semiuncia continet Drachmas 4; eadem Semiuncia continet etiam *Grana* monetaria 18, dicta Germanis *Grän*. Cl. HVBERTI Rudimenta Algebrae §. 134.

renis $= c$. Quaeritur, quantum ex *A*, & ex *B* sit sumendum?

Resolutio vti prius. Ex *A* sumatur *x*, ex *B* $m-x$. Erit valor ex primo $= ax$, & ex altero $= bm-bx$. Debet vero esse $ax+bm-bx=cm$. Igitur $x = m.\frac{c-b}{a-b}$, vbi rursus patet, *c* debere esse medium inter *a* & *b*.

XIX. *Exempl.* 4. Vas vini *A*, cuius vrna veneat florenis $= a$, misceatur aqua, vt obtineatur quantitas vrnarum *m*, quarum quaeuis sit $=$ florenis $b < a$. Quaeritur, quantum ex *A* sumendum, & quantum ex aqua?

Resol. Ex *A* si sumatur *x*, erit ex aqua sumendum $m-x$, cumque valor aquae sit $= o$, erit $ax=b$, & $x = \frac{b}{a}$. *)

XX. *Exemplum* 5. Dedi Caio partem pecuniae meae $= \frac{x}{a}$, Titio partem $= \frac{x}{b}$, vbi sit $a > b$. Querenti Caio, ait Titius, accipe Nummos $= c$, & sumus pares. Quaeritur *x*?

Resolutio. Est $\frac{x}{a}+c = \frac{x}{b}-c$. Igitur tollendo

*) Problemata haec tria de variis massis in vnam miscendis, pertinent ad Regulam sic dictam *Alligationis*.

lendo fractiones fit $x+ac=\frac{ax}{b}-ac$. Pariter $bx+abc=ax-abc$. Hinc $2abc=ax-bx=x(a-b)$ adeoque $x=\frac{2abc}{a-b}$. Caius igitur acceperat $\frac{2bc}{a-b}$ & Titius $\frac{2ac}{a-b}$.

XXI. *Exempl.* 6. Inuenire duos Numeros, quorum Summa sit $=s$, & differentia $=d$.

Resolutio. Si maior vocetur $=x$, erit minor $=s-x$, & $d=x-(s-x)=2x-s$. Hinc, quia est $d=2x-s$, erit $x=\frac{s+d}{2}$, adeoque Numerus minor fit $s-x=s-\frac{s+d}{2}=\frac{2s-s-d}{2}=\frac{s-d}{2}$ i. e. *Pars maior x est aequalis semisummae plus semidifferentiae, & pars minor est aequalis semisummae, minus semidifferentiae.* Ex quo Exemplo patet, vnica aequatione plurium incognitarum valorem inueniri, si nempe incognitae ipsae a se dependeant. *) Plura aequationum simplicium, in quibus vnica tantum incognita occurrit, Exempla continet Compendium Algebrae elementaris *Trentelianum* §. 128—137.

XXII. Problema. *Soluere Problema plurium incognitarum, quibus totidem aequationes simplices respondeant.*

Reso-

*) Cl. Lorenz l. c. Algebra §. 20.

Resolutio. Quaeratur ex prima aequatione iuxta Regulas praecedentes valor vnius incognitae, & substituatur is in aequationibus caeteris, in quibus eadem incognita occurrit, quo fit, vt incognita vna euanescat, siue ex aequatione *eliminetur*. Dein ex aequatione, in qua substitutio praecedens facta est, denuo quaeratur valor incognitae, quae in ea adhuc occurrit, & hic porro substituatur in sequente aequatione, vbi eadem incognita occurrit, & sic pergatur, donec tandem deueniatur ad aequationem, ex qua erui possit valor incognitae vltimae, quo cognito omnes simul reliquae incognitae determinari queant.

E x e m p l a.

XXIII. *Exempl.* 1) Sunto duo vasa argentea diuersi pretii x & y. Vtrique idem operculum imponi possit, cuius valor sit $= a$ florenis. Sed valor vasis x vna cum operculo sit aequalis triplo valori vasis $y = by$, & valor vasis y vna cum operculo sit aequalis valori vasis x, quaeritur valor vtriusque.

Resol. Ex conditione data est I) $x + a = by$. II) $y + a = x$. Igitur ex I) est $x = by - a$, quem valorem substituendo in II) est $y + a = by - a$. hinc

$2a = by - y = y\,(b - 1)$, adeoque $y = \frac{2a}{b-1}$ & hinc

$$x = b \cdot \left(\frac{2a}{b-1}\right) - a = \frac{2ab}{b-1} - a = \frac{2ab - ab + a}{b-1}$$

$= \frac{ab + a}{b-1} = a \cdot \frac{b+1}{b-1}$. Vt ergo assumantur pro a & b Numeri apti, ex quibus fiat valor pro x & y,

Numerus

Numerus *integer*, debet esse *a* multiplum de $b-1$. E. g. posito $b=3$, & $a=4$ erit $y=4$ & $x=8$.

XXIV. *Exemplum* 2) Emit Caius agros tres. Pretium primi cum dimidio pretio duorum reliquorum est $=25$ aureis $=a$. Pretium secundi cum parte tertia pretii reliquorum $=26$ aureis $=b$, & pretium tertii cum dimidio pretio reliquorum $=29$ aureis $=c$; quaeritur, quantum sit pretium singulorum?

Resol. Pretium primi vocetur $=x$, secundi $=y$, tertii $=z$. Erit ex conditione data I) $x+\frac{y+z}{2}=a$ II) $y+\frac{x+z}{3}=b$ III) $z+\frac{x+y}{2}=c$

Vnde ex I) est $x=\frac{2a-y-z}{2}$. Quem valorem substituendo in II) & III) obtinetur II) $y+\frac{2a-y-z}{6}$ $+\frac{z}{3}=b$, adeoque $y=\frac{6b-2a-z}{5}$ & III) $z+$ $\frac{2a-y-z}{4}+\frac{y}{2}=c$.

Valorem inuentum de y substituendo iam in III) fit $\frac{7z}{10}+\frac{2a}{5}+\frac{3b}{10}=c$. Vnde tollendo fractiones fit $z=\frac{10c-4a-3b}{7}=\frac{112}{7}=16$. Inde $y=18$ & $x=8$.

XXV. *Exempl.* 3) Cum Caius, quot poma ex arbore decerpserit, a Titio interrogatus Responsum supra (XVI) relatum dedisset, & cum ad haec Titius numerum pomorum posuisset $= 60$, Caius reponebat ita: Si duplo numeri pomorum decerptorum addatur dimidium, & pars tertia eiusdem numeri, & insuper 5, numerus proueniens tantundem superat numerum 60, quanto iam nunc minor est numerus pomorum decerptorum numero $= 60$. Qualis ergo est numerus pomorum decerptorum?

Resol. Si numerus pomorum vocetur $= x$, & $x+y = 60$ (i. e. si numerus, qui debet addi numero x, vt fiat $x = 60$, vocetur $= y$), erit I) $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 5 = 60 + y$ II) $x = 60 - y$. Inde valorem de y, qui est ex II) $= 60 - x$, substituendo in I) obtinetur $2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + 5 = 60 + 60 - x = 120 - x$. Inde per Metathesin fit $3x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 120 - 5 = 115$. Tollendo iam fractiones fit 1) $6x + x + \frac{2x}{3} = 230$ 2) $18x + 3x + 2x = 690$ i. e. $23x = 690$. Inde $x = \frac{690}{23} = 30$.

XXVI. *Exemplum* 4) Inuenire tres numeros x, y, z, tales, vt Summa primi & secundi sit $= a$ ($= 40$), Summa secundi & tertii $= b$ ($= 100$), & differentia tertii & primi $= d$ ($= 60$), erunt tres aequa-

aequationes I) $x+y=a$ II) $y+z=b$ III) $z-x=d$. Sed tentanti patebit, incognitam vltimam euanescere, si substituatur. Cuius rei ratio est, quia tertia conditio non exprimit nouam proprietatem trium quantitatum incognitarum; sed id tantum repetit, quod iam duabus primis conditionibus est expressum. Quodsi enim aequatio I subtrahitur ex II, prouenit IIItia $z-x=b-a$. Vnde Problema est indeterminatum, & ex prima aequatione est $y=a-x=40-x$. Hinc substituendo fit aequatio II) $40-x+z=100$, adeoque $z=60+x$, vbi patet, esse x determinandum. Sed de eo infra dicetur. *)

XXVII. *Exempl.* 5) Inuenire 4 incognitas x, y, v, z, quarum conditiones sint totidem aequationibus expressae, videlicet I) $x+y=a$ II) $x+v=b$ III) $y+z=c$ IV) $z+v=d$. Solui ex eadem (praeced.) ratione hoc Problema non potest, vti tentanti patebit. Pariter, si datae sint hae 4 aequationes I) $x-y=a$ II) $x-v=b$ III) $y-z=c$ IV) $z-v=d$; solutio ex eadem ratione non habetur. Generaliter si plures numeri incogniti, quam duo, numero pares sint inueniendi, ita vt binorum quorumque vel sola Summa, vel sola Differentia sit data, solui Problema nequit. At si in vna aequatione detur duorum differentia, iam solui potest. **)

XXVII.

*) Conf. Vega Vorlesungen über die Mathematik. I Band. 2te Aufl. §. 226.

**) Cl. Trentel Compendium Algebrae elementar. §. 142.

XXVIII. *Exempl.* 6) Ex quatuor his aequationibus I) $x+y=a$ II) $x+z=b$ III) $y+z=d$ IV) $y+v=f$ inuenire x, y, z, v. Solui hoc Problema poteſt, quin ex eo ſequatur, falſa eſſe, quae numero praecedente dicta ſunt.

XXIX. *Exemplum* 7) Inuenire numerum x, cui ad Potentiam *meſimam* eleuato ſi addatur b, proueniat numerus $=q$.

Reſol. Inuoluit conditio data aequationem compoſitam gradus puri, videlicet $x^m+b=q$. Inde $x^m=q-b$ & $x=\sqrt[m]{(q-b)}$ atque hic eſt modus generalis, omnes aequationes compoſitas gradus puri ſoluendi. Plura Exempla Problematum, in quibus plures ſunt incognitae, habentur in Compendio Trenteliano §. 138—142 &c.

Articvlvs II.

De Reſolutione Problematum determinatorum, quae ad aequationes compoſitas ſecundi gradus adfecti reducuntur.

XXX. Problema. *Soluere aequationem ſecundi gradus adfecti.*

Reſolutio. Cuiuslibet aequationis gradus *adfecti ſecundi* Expreſſio eſſe poteſt $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}}=b$. Quotiescunque nimirum aequatio data iuxta Regulas praecedentes eo vſque reducta eſt, vt incognitae in vno membro poſitae Exponens *minimus* ſit

fit dimidium *maximi*, & incognita Exponentis *maximi* fit *positiua* (qualis esse debet omnis Quantitatis Potentia *secunda*), & nullo Coefficiente, praeter 1, *adfecta* (quia quadrati cuiuslibet Quantitatis monomiae *Coefficiens* est duntaxat = 1); adest Problema *secundi gradus adfecti*, cuius proinde *Forma* generalis est $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}} = b$ * (V). Vt iam ex aequatione hac $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}} = b$ inueniatur incognita x, seruentur sequentes Regulae.

1) Quadratum $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}}$ est *imperfectum* (Differt. II. 9), quia nonnisi duobus Terminis constat, cum tamen Radix quaelibet *binomia* ** in quadrato tres partes praebeat (Differt. II. 6). Igitur ex eo Radix adcurata quadrata extrahi non potest, quae tamen extrahenda est, vt incognitae x valor intelligatur. Vt igitur ea extrahi possit, qua-

---

* Vti Terminus primus x^m, qui continet quadratum incognitae, debet semper esse positiuus, ita Terminus alter $2ax^{\frac{m}{2}}$, qui continet duplum factum ex prima Nota radicali in secundam, potest vel positiuus, vel negatiuus esse, prout vel ambae Notae radicales sunt positiuae, vel ambae negatiuae, vel altera positiua, & altera negatiua, ideo duplo facto $2ax^{\frac{m}{2}}$ praefigitur duplex signum $\pm$.

** Radicem quadrati $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}}$ debere duarum Notarum esse, ex eo liquet, quia, si vnius tantum Notae esset, quadratum eius etiam vnico tantum Termino constare posset, quod tamen hic secus est.

quadratum istud imperfectum debet *perfici*, siue *compleri*, i. e. illa ipsa pars, quae ex illis tribus partibus hic deest, quas quaelibet Radix binomia in quadrato praebet (l. c.), adiicienda est, & quidem membro *vtrique* aequationis, vt salua sit aequalitas. Quoniam iam, si x^m sumitur pro quadrato primae Notae radicalis $\left(= x^{\frac{m}{2}}\right)$, pars altera $\pm 2ax^{\frac{m}{2}}$ necessario est factum ex prima Nota radicali in *duplum* secundae; eoquod in solo duplo facto ex prima Nota radicali in secundam potest occurrere prima Nota radicalis $x^{\frac{m}{2}}$: consequens est, vt in quadrato dato imperfecto desit quadratum secundae Notae radicalis. Vt ergo quadratum $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}}$ compleatur, adiiciatur deficiens quadratum secundae Notae radicalis vtrique membro aequationis. Sed vt illud adiici possit, inprimis sciendum est, quae sit altera Nota radicalis; atque haec inuenitur, si Coëfficientes incognitae minimi Exponentis diuidantur per 2. Namque cum ex dictis termini illi, qui continent incognitam minimi Exponentis, siue primam Notam radicalem $x^{\frac{m}{2}}$, sint Factum ex Nota prima radicali in *duplum secundae*: necessario Coefficientes incognitae minimi Exponentis sunt *duplum* alterius Notae radicalis. Vt ergo simplex Nota secunda radicalis obtineatur, Coefficientes omnes incognitae minimi Exponentis sunt diuidendi per 2. Igitur cum in Schemate

$x^m \pm$

$x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}} = b$, Coefficiens incognitae minimi Exponentis fit $\pm 2a$, erit altera pars Radicis $= \pm \frac{2a}{2} = \pm a$, eiusque quadratum $= a^2$. Quo vtrique membro adiecto, obtinetur $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}} + a^2 = a^2 + b$ atque ita quadratum est completum.

2) Extrahatur iam vtrinque Radix quadrata. Est illa de $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}} + a^2 = x^{\frac{m}{2}} \pm a$ & de $a^2 + b = \sqrt{(a^2 + b)}$. Igitur habetur iam aequatio $x^{\frac{m}{2}} \pm a = \sqrt{(a^2 + b)}$ Vnde per Metathesin est $x^{\frac{m}{2}} = \mp a \pm \sqrt{(a^2 + b)}$. [Signo $\sqrt{}$ praefigitur duplex signum $\pm$, eoquod Radix quaelibet quadrata potest esse vel *positiua*, vel *negatiua*. Quaenam vero sit sumenda, tentando intelligitur. Ea nimirum sumenda est, quae aequationi datae satisfacit].

Quia iam porro est $x^{\frac{m}{2}} = \sqrt{x^m}$ (Differt. II. 4), hinc substituendo fit $\sqrt{x^m} = \mp a \pm \sqrt{(a^2 + b)}$, & iam vtrinque quadrando fit $x^m = [\mp a \pm \sqrt{(a^2 + b)}]^2$, & extrahendo Radicem *mesimam* tandem obtinetur $x = \sqrt[m]{[\mp a \pm \sqrt{(a^2 + b)}]^2}$. Atque haec est methodus generalis, ex aequatione secundi gradus adfecti incognitam eruendi.

XXXI. Posito $m = - n$, aequatio prior $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}} = b$ abit in hanc $x^{-n} \pm 2ax^{-\frac{n}{2}} = b$.

Vnde

Vnde complendo quadratum imperfectum $x^{-n} \pm 2ax^{-\frac{n}{2}}$ obtinetur $x^{-n} \pm 2ax^{-\frac{n}{2}} + a^2 = b + a^2$, & iam extrahendo Radicem quadratam fit $x^{-\frac{n}{2}} \pm a = \sqrt{(b+a^2)}$ & per Metathesin est $x^{-\frac{n}{2}} = \mp a \pm \sqrt{(a^2+b)}$. Quia vero est $x^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^n}}$ (Diss.II.4), hinc substituendo fit $\frac{1}{\sqrt{x^n}} = \mp a \pm \sqrt{(a^2+b)}$, & iam tollendo fractionem est $1 = \left(\mp a \pm \sqrt{(a^2+b)}\right) \times \sqrt{x^n}$. Vnde $\sqrt{x^n} = \frac{1}{\mp a \pm \sqrt{(a^2+b)}}$. & vtrinque quadrando est $x^n = \frac{1}{[\mp a \pm \sqrt{(a^2+b)}]^2}$. Tandem extrahendo Radicem *nesimam* fit
$$x = \frac{1}{\sqrt[n]{[\mp a \pm \sqrt{(a^2+b)}]^2}}.$$

XXXII. Similiter posito $m = \frac{n}{r}$, aequatio $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}} = b$ abit in hanc $x^{\frac{n}{r}} \pm 2ax^{\frac{n}{2r}} = b$. Ex qua iuxta Regulas praecedentes obtinetur
$x = \sqrt[n]{[\mp a \pm \sqrt{(b+a^2)}]^{2r}}$ & posito $m = -\frac{n}{r}$ aequa-

aequatio $x^m \pm 2ax^{\frac{m}{2}} = b$ abit in hanc $x^{-\frac{n}{r}} \pm 2ax^{-\frac{n}{2r}} = b$. Ex qua fit $x = \frac{1}{\sqrt[n]{[\mp a \pm \sqrt{(a^2+b)}]^{2r}}}$

XXXIII. Problema. Inuenire Numerum x, qui sit aequalis suo quadrato.

Resol. Est ex conditione data $x = x^2$. Igitur $x^2 - x = 0$. Hinc complendo quadratum fit $x^2 - x + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ & extrahendo Radicem quadratam est $x - \frac{1}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$. Igitur $x = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$ i. e. vel $= 1$ vel $= 0$. Vterque enim valor aequationi satisfacit. Idem valor $= 1$ obtinetur, si vtrumque membrum aequationis $x^2 = x$ diuidatur per x.

XXXIV. Caius, quot annorum esset interrogatus, mater mea, ait, cum esset quadraginta annorum, me peperit. Quodsi iam numerus annorum meorum $= x$ ducatur in numerum annorum matris meae, prouenit numerus $= 969$. Quaeritur x.

Resol. Aetas matris erit $= 40 + x$. Igitur $40x + x^2 = 969$. hinc complendo quadratum fit $x^2 + 40x + 400 = 1369$ & hinc $x + 20 = \sqrt{1369}$ inde $x = -20 \pm 37 = 17$.

XXXV. Inuenire numeros x & y, si dentur bina ex his sex

1) Summa $x + y = s$

2) Differentia $x - y = d$

3) Factum

3) Factum $xy = f$

4) Quotus $\frac{x}{y} = q$

5) Summa quadratorum $x^2 + y^2 = S$

6) Differentia quadratorum $x^2 - y^2 = D$.

Cum res sex possint in 15 binarios combinari, praefati Problematis sunt determinati casus quindecim, videlicet

Probl. I.

$x + y = s$ ——— $x^2 + y^2 = S$

Probl. II.

$x + y = s$ ——— $x^2 - y^2 = D$

Probl. III.

$x + y = s$ ——— $\frac{x}{y} = q$

Probl. IV.

$x + y = s$ ——— $x - y = d$

Probl. V.

$x + y = s$ ——— $xy = f$

Probl. VI.

$x - y = d$ ——— $x^2 + y^2 = S$

Probl. VII.

$x - y = d$ ——— $x^2 - y^2 = D$

Probl. VIII.

$x - y = d$ ——— $\frac{x}{y} = q$

Probl. IX.

$x - y = d$ ——— $xy = f$

Probl.

PROBL. X.

$xy = f$ ———— $x^2 + y^2 = S$

PROBL. XI.

$xy = f$ ———— $x^2 - y^2 = D$

PROBL. XII.

$xy = f$ ———— $\frac{x}{y} = q$

PROBL. XIII.

$x^2 + y^2 = S$ ———— $x^2 - y^2 = D$

PROBL. XIV.

$x^2 + y^2 = S$ ———— $\frac{x}{y} = q$

PROBL. XV.

$x^2 - y^2 = D$ ———— $\frac{x}{y} = q$

Tentanti patebit, varios ex his 15 caſibus eſſe gradus ſecundi adfecti, ceteros gradus puri. *

ARTICVLVS III.

De Reſolutione Problematum indeterminatorum.

XXXVI. PROBLEMA. Soluere aequationem Problematis indeterminati (VII).

Reſolutio. Quodſi ad aequationem *finalem* iuxta Regulas praecedentes ventum fuerit, in cuius vno membro ſit vna incognita ſola, tum pro *incognita*, quae in altero adhuc membro praeter cognitas

---

* Cl. TRENTEL Compendium Algebrae §. 147.

cognitas semper occurrit, si Problema sit indeterminatum, substituantur *apti* i. e. eiusmodi valores, qui cognitis eiusdem membri aut additi, aut ab iis subtracti &c. incognitam alteram, quae sola in altero membro occurrit, ita determinent, vt Problematis conditionibus satisfiat. E. g.

XXXVII. *Exemplum* 1. Inuenire duos numeros x & y tales, vt quadruplum primi sit = quadrato secundi.

Resol. Ex conditione data est $4x = y^2$. Vnde $x = \frac{y^2}{4}$, posito iam pro y quocunque valore, satisfiet conditioni Problematis. E. g. posito $y = 6$, erit $x = \frac{36}{4} = 9$, & posito $y = 4$, erit $x = \frac{16}{4} = 4$. Vnde infiniti valores pro x & y sunt possibiles, ideoque totum Problema *indeterminatum* audit.

XXXVIII. *Exemplum* 2. Inuenire quatuor numeros v, x, y, z, quorum Summa sit = 10, & Summa ex quintuplo primi, sextuplo secundi, septuplo tertii, & octuplo quarti sit = 70.

Resolutio. Erit I) $v + x + y + z = 10$ II) $5v + 6x + 7y + 8z = 70$. Multiplicando iam primam aequationem per 8 prouenit $8v + 8x + 8y + 8z = 80$. Ex qua noua aequatione subtrahendo aequationem II), resultat aequatio $3v + 2x + y = 10$, atque haec vocetur = N. Eodem modo multiplicando aequationem I) per 7, prouenit $7v + 7x + 7y + 7z = 70$. Ex qua si subtrahatur aequatio

tio II), resultat aequatio $2v + x - z = 0$, quae vocetur $= M$. Iam ex aequationibus M & N quaerantur y & z. Erit ex N $y = 10 - 3v - 2x$, & ex M erit $2v + x = z$, vbi patet, esse v & x determinanda. Posito e. g. $v = 1$ & $x = 2$, erit $y = 3$ & $z = 4$, & posito $v = \frac{1}{2}$, $x = 2$, erit $y = 4\frac{1}{2}$ & $z = 3$. Sicque infinitis modis solutio haberi potest.

SCHOLION. Vt in Problematis *indeterminatis* valor incognitae, quae in altero membro aequationis *sola* est, obtineatur *positiuus*, attendendum est, vtrum in membro altero, quod praefatae incognitae valorem, cognitis & incognitis expressum, continet, occurrant quantitates *negatiuae*, nec ne? si nullae occurrant *negatiuae* quantitates (vti in Exemplo 1), valor incognitae quaesitus semper euadit *positiuus*, quomodocunque incognitae in altero membro positae determinentur: quodsi vero adsint praeter *positiuas* quantitates etiam *negatiuae*, tunc positiuae debent esse maiores *negatiuis*, vt, facta reductione, resultet valor positiuus. E. g. in Exemplo 2do erat $y = 10 - 3v - 2x$, & $z = 2v + x$. Vbi patet, vt y fiat *positiuum*, debere esse $10 > 3v + 2x$. Hinc v & x debent ita determinari, vt fiat $3v + 2x < 10$. Hinc debet esse $10 - 3v > 2x$ & hinc $5 - \frac{3v}{2} > x$. Vt iam igitur x fiat *positiuum*, debet esse $5 > \frac{3}{2}v$, adeoque $10 > 3v$, adeoque & $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3} > v$. Porro ex eo, quia debet esse $10 > 3v + 2x$, pariter fluit, esse

debere

debere $10-2x > 3v$; proinde vt v fiat *positiuum*, esse debet $10 > 2x$, adeoque $5 > x$. Proinde x debet sumi *minor* quam 5. Vnde liquet, vt omnes dati Problematis quantitates incognitae fiant *positiuae*, esse debere $v < 3\frac{1}{3}$ & $x < 5$, ita tamen, vt sit $3v+2x < 10$. Posito e. g. $v = 2$ erit $3v = 6$ adeoque debebit esse $6+2x < 10$, igitur $2x < 10-6 = < 4$ & hinc $x < 2$, vt y fiat *positiuum*. Posito autem $x = 4$, erit $2x = 8$, adeoque, vt y fiat *positiuum*, debet esse $3v+8 < 10$ hinc $3v < 10-8 = < 2$ hinc $v < \frac{2}{3}$.*

XXXIX. *Exemplum* 3. Sint tres species argenti A, B, C, marca primae A contineat argenti puri lothones 14, & secundae B lothones 11, & tertiae C lothones 9. Componenda est ex his massa = 30 marcis, quarum quaelibet contineat lothones argenti puri 12. Quaeritur, quot marcae ex qualibet specie sint sumendae.

Resol. Ex A sumatur x, ex B y, ex C z. Erunt duae aequationes

$$\text{I)}\ x+y+z = 30.$$
$$\text{II)}\ 14x+11y+9z = 360.$$

Multiplicando iam aequationem I) per 9, obtinetur $9x+9y+9z = 270$. & hanc aequationem subtrahendo ex aequatione II) obtinetur $5x+2y = 90$. Hinc $2y = 90-5x$ & $y = \frac{90-5x}{2} = 45 - \frac{5x}{2}$. Inde liquet, 1) debere x esse numerum *parem*, vt

* Abel Burja l. c. 2ter Theil. §. 20. seq.

vt y fiat integer numerus. 2) Vt y fiat positiuum, esse debere $45 > \frac{5x}{2}$, siue $90 > 5x$ adeoque $x < 18$. Ex aequatione autem I) est $z = 30 - x - y$. Vnde pro y substituendo valorem inuentum $= 45 - \frac{5x}{2}$, fit $z = 30 - x - 45 + \frac{5x}{2} = \frac{3x}{2} - 15$. Igitur vt fiat z *positiuum*, debet esse $\frac{3x}{2} > 15$, adeoque $3x > 30$, adeoque $x > 10$. Vt ergo x fiat numerus *par*, & > 10, sed < 18, necessario debet poni vel $= 12$, vel $= 14$, vel $= 16$, & tunc erit $y = 15$, 10, 5 & $z = 3$, 6, 9. *

Scholion. Quod si Problematis indeterminatis haec sit adiecta conditio, vt non solum pro incognitis inueniantur valores *positiui*, sed &, vt valores hi sint numeri *integri*, tunc operandum est, vti Problematum sequentium Resolutio docet.

XL. Problema. 1) Sint soluendi 1000 fl. *Nummis Carolinis* (Carolini valor = 11 fl.), & Du-

---

* Cl. Lorenz Elemente der Mathematik. I Th. Algebra. §. 75.

** Potuisset Problema isthoc etiam per substitutionem ita solui; ex aequatione I) est $x = 30 - y - z$ hinc substituendo abit aequatio II) in hanc „$420 - 14y - 14z = 360$ adeoque fit $420 - 360 - 14y = 14z$ & $z = \frac{60 - 14y}{14}$. Vbi patet, esse y determinandum ita, vt fiat $60 > 14y$.

Ducatis (valoris = 5 fl.), quaeritur, quot Nummi *Carolini*, & quot *Ducati integri* sint soluendi?

Resol. Si numerus Carolinorum vocetur $= x$, & Ducatorum $= y$, erit ex conditione Problematis $11x + 5y = 1000$. Vnde $y = \frac{1000 - 11x}{5} = 200 - 2x - \frac{x}{5}$. Cum iam $\frac{x}{5}$ debeat ex conditione data esse *integer*, fiat $\frac{x}{5} = m$, & erit $x = 5m$. Vnde $y = 200 - 11m$. Vbi patet, esse m determinandum, & quidem determinari posse per omnes illos numeros integros, qui ducti in 11 dent Factum, quod ex numero 200 subtractum relinquat numerum integrum, & positiuum. E. g.

posito m =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
erit y =	189	178	167	156	145	134	123	112	101	90	79	68
erit x =	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60

Et sic porro.

Vbi facile patet lex Progressionis vtriusque. Item patet, quot modis Problema solui possit. Nimirum 18 modis. Namque posito $m = 18$ erit $x = 90$, & $y = 2$. Posito autem $m = 19$ erit $x = 5m = 95$ & $y = 200 - 11m = 200 - 209 = -9$. Demum si solutio fieri non posset, id ipsa aequatio ostenderet. E. g. si daretur $11x + 5y = 50$ fl. foret $y = 10 - 11m$ & $x = 5m$,

vbi si fiat $m = 0 \,.\, 1 \,.\, 2$ erit $\begin{cases} x = 0 \,.\, 5 \,.\, 10 \\ y = 10 \,.\, -1 \,.\, -12 \end{cases}$ ergo 50 fl. solui non possunt integris *Carolinis* & *Ducatis*.

PROBL.

PROBL. 2. Sint soluendi 1100 fl. Seuerinis x (valoris = 15 fl.) & Carolinis y (valoris = 11 fl.), quaeritur, quot Carolini & quot Seuerini sint soluendi?

Resol. Fiat vt prius $15x + 11y = 1100$. Inde $y = \frac{1100 - 15x}{11} = 100 - x - \frac{4x}{11}$. Sit iam $\frac{4x}{11} = m$, erit $4x = 11m$ & hinc $x = \frac{11m}{4} = 2m + \frac{3m}{4}$. Posito porro $\frac{3m}{4} = n$, erit $m = \frac{4n}{3} = n + \frac{n}{3}$. Fiat denuo $\frac{n}{3} = p$, erit $n = 3p$, hinc $m = n + \frac{n}{3} = 4p$ & $x = 11p$ & $y = 100 - 15p$. Sit iam

	$p =$ 1	2	3	4	5	6
erit	$x =$ 11	22	33	44	55	66
	$y =$ 85	70	55	40	25	10

Simili modo soluuntur duo Problemata sequentia *indeterminata*.

PROBL. 3. Titius Mercator debet Caio 100 fl. Caius pro hac Summa petit duplicis generis pannum. Vlna primi generis constet 7 fl., & vlna secundi 9 fl. quaeritur, quot vlnae *NB. integrae* de vtroque genere panni accipiendae sint?

Resol. Vocetur numerus vlnarum primi generis panni $= x$, & alterius $= y$, erit vi conditionis datae $7x + 9y = 100$. Inde $x = \frac{100 - 9y}{7} = 14 - y - \frac{2y + 2}{7}$. Fiat iam $\frac{-2y + 2}{7} = -m$, erit

erit $-2y+2 = -7m$. hinc $2+7m = 2y$ & $\frac{2+7m}{2} = y = 3+1m+\frac{m}{2}$. Fiat porro $\frac{m}{2} = n$, erit $m = 2n$. Vnde $y = \frac{2+7m}{2} = \frac{2+14n}{2} = 1+7n$ & $x = 14 - y - \frac{2y+2}{7} = 14 - 1 - 7n - \frac{2+14n+2}{7}$ $= 13 - 9n$. Posito iam

erit $\left\{\begin{array}{lll|l|l} n & = & 0 & 1 & 2 \\ x & = & 13 & 4 & -5 \\ y & = & 1 & 8 & 15 \end{array}\right\}$ vbi liquet, duobus tantum modis Problema solui posse.

Coroll. Ex praecedentis Problematis solutione colligit Cl. Vega Problema indeterminatum huius formae $y = a \pm bx \frac{\pm px \pm c}{d}$ posse solui in numeris integris positiuis, dummodo duo numeri p & d non habeant factorem communem. Secus solutionem in numeris integris & positiuis non haberi, vti ex Problemate isto $y = 1 + 10x + \frac{4x-5}{6}$ tentanti pateat. Porro esse $\frac{\pm px \pm c}{d}$ ponendum $= +m$ & $\frac{-px \pm c}{d} = -m$, vt valor minimus incognitae x obtineatur.

Probl. 4. Inuenire numerum x, qui diuisus per 3 relinquat 1, diuisus per 5 relinquat 2, & diuisus per 17 relinquat 3.

Resol.

Resol. Fiat $\frac{x-1}{3}=m$ erit $x=3m+1$, Dein $\frac{x-2}{5}=\frac{3m+1-2}{5}=f$ demum $\frac{x-3}{17}=g$. Erit $3m-1=5f$ & $m=\frac{5f+1}{3}=f+\frac{2f+1}{3}$, Fiat $\frac{2f+1}{3}=h$, erit $f=\frac{3h-1}{2}=h+\frac{h-1}{2}$ fiat iterum $\frac{h-1}{2}=k$ erit $h=2k+1$, ergo $f=3k+1$ & $m=5k+2$ & $x=15k+7$. Demum $\frac{x-3}{17}=\frac{15k+4}{17}=g$. Erit $k=\frac{17g-4}{15}=g+\frac{2g-4}{15}$. Fiat porro $\frac{2g-4}{15}=l$ erit $g=\frac{15l+4}{2}=7l+2+\frac{l}{2}$. Tandem fiat $\frac{l}{2}=p$ erit $l=2p$. hinc $g=15p+2$ & $k=17p+2$ & ex aequatione $\frac{x-3}{17}=\frac{15k+4}{17}$ erit $x=15k+7$ Vnde pro k substituendo eius valorem erit $x=15(17p+2)+7=255p+37$

Posito iam	$p=$	1	2	3
erit	$x=$	292	547	802

Nimirum, ait Caius, interrogatus, quot oues habeat, si numerum earum diuido per 3, remanet 1; si vero per 5, remanent 2, & si per 17, remanent 3.*

PROBL.

* VEGA l. c. S. 294.

PROBL. 5. Inuenire duos numeros integros x & y tales, vt, si alter x ducatur in 25, & alter y in 16, sit factum $25x$ Vnitate minus facto $16y$.

Resol. Ex conditione data est $25x + 1 = 16y$. Vnde $y = \frac{25x+1}{16} = x + \frac{9x+1}{16}$. Posito iam $\frac{9x+1}{16} = m$, erit $9x + 1 = 16m$, & $x = \frac{16m-1}{9} = m + \frac{7m-1}{9}$. Posito rursus $\frac{7m-1}{9} = n$, erit $7m - 1 = 9n$, & $m = \frac{9n+1}{7} = n + \frac{2n+1}{7}$. Sit porro $\frac{2n+1}{7} = p$, & erit $2n+1 = 7p$, vnde $n = \frac{7p-1}{2} = 3p + \frac{p-1}{2}$. Denum posito $\frac{p-1}{2} = q$, erit $p - 1 = 2q$ & $p = 2q + 1$.

Igitur quia est I) $p = 2q+1$

erit substituendo II) $n = 3p + \frac{p-1}{2} = 7q+3$

III) $m = n + \frac{2n+1}{7} = 9q+4$

IV) $x = m + \frac{7m-1}{9} = 16q+7$

V) $y = x + \frac{9x+1}{16} = 25q+11$

Posito

Posito iam	$q =$ 0	1	2	3	4	
erit	$x =$ 7	23	39	55	71	&c.
	$y =$ 11	36	61	86	111	

VEGA l. c. S. 291.

XLI. PROBL. *Inuenire duos numeros x & y, quorum Summa, Factum & Differentia quadratorum sint aequalia.*

Resol. Sit $x > y$, erit ex conditione Problematis $x+y = xy$

$$x^2 - y^2 = xy$$

hinc $x+y = x^2 - y^2$

Est vero $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. ergo substituendo in tertia aequatione, erit $x+y = (x+y)(x-y)$ hinc $1 = x-y$ & $x = 1+y$. Hunc valorem substituendo in prima aequatione est $1+2y = y+y^2$, & hinc $1 = y^2 - y$. Vnde complendo quadratum fit $1 + \frac{1}{4} = y^2 - y + \frac{1}{4}$, & extrahendo Radicem quadratam est $y - \frac{1}{2} = \sqrt{(1 + \frac{1}{4})}$, & hinc

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(1+\frac{1}{4})} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}.\ \text{Vnde}\ x = 1 + \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.*$$

XLII. PROBLEMA. Diuidere datum quadratum a^2 in duo $= x^2 + y^2$.

Resol. Ex conditione data est $a^2 = x^2 + y^2$. Vnde $x = \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Adsumatur iam pro x, siue pro $\sqrt{(a^2 - y^2)}$ eiusmodi valor, vt y simplici possit aequatione determinari: atque eiusmodi valor est $x = \sqrt{(a^2 - y^2)} = a - my$. Quodsi enim vtrinque fiat

* Cl. KAESTNER Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen. 2te Aufl. §. 39.

fiat quadratum, prouenit $a^2 - y^2 = a^2 - 2amy + m^2y^2$. Vnde $-y^2 = -2amy + m^2y^2$ & diuidendo vtrinque per y est $-y = -2am + m^2y$. Vnde $2am = m^2y + y = y(m^2 + 1)$. hinc $y = \frac{2am}{m^2+1} = a \cdot \frac{2m}{1+m^2}$ Hinc $x = \sqrt{(a^2 - y^2)} = \sqrt{\left(a^2 - \frac{4a^2m^2}{(m^2+1)^2}\right)} = a \cdot \frac{1-m^2}{m^2+1}$. Vbi liquet, adsumendum esse $m < 1$. E. g. posito $a = 6$, & $m = \frac{1}{2}$, erit $y = 4\frac{4}{5}$ & $x = 3\frac{3}{5}$. KAESTNER l. c. S. 81.

XLIII. PROBLEMA. Inuenire duo quadrata, quorum differentia sit datum quadratum.

Resol. Sit, vt in praecedente, $a^2 = x^2 - y^2$, erit $x = \sqrt{a^2 + y^2}$. Posito iam $x = \sqrt{(a^2 + y^2)} = a + my$, & calculo, vti in praecedente (XLII), instituto, obtinebitur $x = a \cdot \frac{1+m^2}{1-m^2}$ & $y = a \cdot \frac{2m}{1-m^2}$. Igitur rursus debet esse $m < 1$.

XLIV. Inuenire tres numeros integros x, y, z tales, vt quadratum maximi z sit = quadratis reliquorum simul sumtis.

Resol. Ex conditione data est $z^2 = x^2 + y^2$. Vnde $y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x)$. Posito iam $z + x = s$ & $z - y = d$, erit $z = \frac{s+d}{2}$ & $x = \frac{s-d}{2}$ (Pars maior z est = Semisummae plus Semidifferentiae, & pars minor x = Semisummae, minus Semi-

Semidifferentiae). Igitur $y^2 = z^2 - x^2 = dS$; Quia iam est $y < z + x$ (nam ex hypothesi est iam $z > y$), erit etiam $y < S$. Posito itaque $\frac{S}{n} = y$, siue $S = ny$, erit (ex aequatione $y^2 = Sd$) $d = \frac{y^2}{S} = \frac{y^2}{ny} = \frac{y}{n}$. Posito iam porro $\frac{y}{n} = m$, erit $y = mn$ hinc $S = ny = mn^2$ & $z = \frac{S+d}{2} = \frac{mn^2+m}{2} = \frac{m(n^2+1)}{2}$, & $x = \frac{S-d}{2} = \frac{mn^2-m}{2} = \frac{m(n^2-1)}{2}$.

Vbi patet, si *m* adsumatur *par*, pro *n* posse assumi *parem*, vel *imparem*. Factum enim ex $n^2 \pm 1$ in numerum, ex hypothesi *parem* *m* semper *par* est, adeoque per 2 adcurate diuisibile. Si vero *m* sumitur *impar*, debet $n^2 \pm 1$ esse *par*, adeoque *n* *impar*. E. g. posito $m = 1$ & $n = 3$ erit $x = 4$, $y = 3$, $z = 5$. Posito autem $m = 2$, & $n = 4$, erit $y = 8$, & $x = 15$, $z = 17$.*

XLV. Data differentia $= d$ duarum Radicum, inuenire quadrata, & horum Differentiam $= D$.

Resol. Erunt Radices x & $x+d$, quarum quadrata sunt x^2 & $x^2 + 2dx + d^2$. Igitur $D = 2dx + d^2$.

Posito

* Problematis huius vsus est in Demonstratione *Trianguli Pythagorici*, de quo in Geometria. KAESTNER l. c.

Posito iam $d = 1$ & $x = 1 \mid 2 \mid 3$

erit

$D =$	3	5	7
$x^2 =$	1	4	9
$(x+d)^2 =$	4	9	16

Posito autem $d = \frac{1}{2}$ & $x = \frac{1}{2} \mid \frac{1}{3}$

erit

$D =$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{12}$
$x^2 =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$
$(x+d)^2 =$	1	$\frac{25}{36}$

In primo Exemplo (vbi $d = 1$), patet, *Differentiam duorum quadratorum, quorum Radices Vnitate differant, esse aequalem Summae Radicum.* Similiter ex Resolutione Problematis „*Inuenire differentiam duorum Cuborum, quorum Radices Vnitate differant*, fluit, *hanc differentiam esse* = *aggregato ex quadrato Radicis maioris, duplo quadrato minoris, & Radice minore. Vnde facilis est constructio Tabulae Quadratorum & Cuborum.*

DISSER-

DISSERTATIO IV.

DE PROGRESSIONIBVS.

CAPVT I.

DE PROGRESSIONE ARITHMETICA.

1) DEFINITIO. Ratio (Verhältnifs) duarum Quantitatum *a* (*antecedens*), & *b* (*confequens*) eft Comparatio earum, confiderando, quomodo altera ex altera oriatur. Exprimitur per a:b i:e *a* fe habet ad *b* vel fimpliciter *a* ad *b*. Duplex vero modus eft, quo *b* ex *a* oriri poteft. Vel enim *b* oritur ex *a*, fi quanto *a* addatur aut ab eo fubtrahatur Numerus $= d$, qui *differentiam* inter *a* & *b* conftituit, vel *b* oritur ex *a*, fi *a* toties & ita *fibi* addatur, quoties & quomodo Vnitas continetur in Numero $= q$, i. e. fi *a* multiplicetur per Numerum $= q$, qui prouenit, fi confequens *b* per antecedens *a* diuiditur. Inde Ratio duplex eft a) *arithmetica*, b) *geometrica*. *Illa* eft Comparatio duarum Quantitatum *a* & *b*, fpectando earum *differentiam*: *haec* vero eft Comparatio duarum Quantitatum, fpectando, quoties, & quomodo altera *a* contineatur in altera *b*, i. e. fpectando *Numerum* $= q$, quo multiplicata quantitas *a* generet quantum *b*. Vterque Numerus *d* & *q* dicitur *Exponens* Rationis: ille *arithmeticae*, hic *geometricae*. Quia vero Ratione *geometrica* fola Quantorum Quantitas

 deter-

determinatur, *) quae proprium Matheseos obiectum est, inde est, cur, si de Ratione *simpliciter* i. e. non addito λυ *arithmetica* sermo sit, Ratio *geometrica* κατ᾽ ἐξοχήν intelligatur.

2) Coroll. I. Termini Rationis debent esse *homogenei*. Rerum enim *heterogenearum* nulla ex altera oriri potest. Quia vero & quanta *contrarie* opposita sunt *homogenea*, ita ad se relata, vt alterum tollat alterum vel ex parte, vel ex toto, liquet, & haec posse Terminos Rationis esse.

Coroll. II. Cuiuscuis Rationis *arithmeticae* Formula est $a : a \pm d$. Namque si antecedens vocetur $= a$, consequens $= b$ & differentia $= d$, quaelibet Ratio arithmetica exprimi potest per $a : b$. Sed b est vel *maior*, vel *minor*, vel *aequalis* antecedenti a. Si fuerit $b > a$, patet esse $b = a + d$. Si fuerit $b < a$, erit $b = a - d$, & si $a = b$, erit $d = 0$; adeoque generatim est $b = a \pm d$ i. e. consequens b est $=$ antecedenti a addita, vel subtracta differentia: hinc, substituendo, formula $a : b$ abit in hanc $a : a \pm d$.

3. Defi-

*) *Quantitas* quanti b definitur, si determinetur, quoties alia quantitas, ei homogenea, (*Vnitas* vel *mensura*.) e. g. a contineatur in b i. e. si b *mensuretur* per a i. e. si determinetur Numerus $= q$, indicans, quoties, & quomodo quantitas a sibi ipsi addi debeat, ut quantum b generetur. Atqui eiusmodi Numerus spectatur in Ratione *geometrica*; non vero in *arithmetica* (in *arithmetica* enim spectatur Numerus $= d$, qui debet aut addi ad a aut ab a subtrahi, ut b oriatur): ergo Ratione *geometrica* sola Quantorum *quantitas* definitur.

3) Definitio. Rationes *arithmeticae* sunt aequales, quarum eadem est differentia. E. g. Rationes hae *arithmeticae* 2:4, 6:8, 10:12 &c. sunt *aequales* ob eandem differentiam = 2. Similiter Rationes *geometricae* sunt aequales, quae habent eundem Exponentem. E. g. 2:4, 8:16, 12:24, vbi *Exponens* siue *quotus* est = 2.

4) Definitio. Aequalitas duarum Rationum dicitur *Proportio*. Quae Rationes si sunt *arithmeticae*, ipsa Proportio est *arithmetica*, secus *geometrica*. E. g. $\begin{matrix} a:b = c:f \\ 2:4 = 6:8 \end{matrix}$ est Proportio *arithmetica*, ita enuncianda „Vti se habet 2 ad 4, ita quoque se habet 6 ad 8 i. e. generaliter quanto minor vel maior est *antecedens* primae Rationis *a* consequente *b*, tanto quoque minor vel maior est *antecedens* alterius Rationis *c* consequente *f*. Similiter $\begin{matrix} a:b = c:f \\ 4:16 = 5:20 \end{matrix}$ est Proportio *geometrica*, sic enuncianda, vti se habet 4 ad 16, ita quoque est 5 ad 20, vel generaliter *quoties* & *quomodo* antecedens primae Rationis *a* continetur in consequente *b*, toties, & ita *antecedens* secundae Rationis *c* continetur in suo *consequente f*.

5) Definitio. Proportio porro est vel *discreta*, vel *continua*. *Illa* adest, si Terminus secundus differt a Termino tertio, e. g. a:c = b:d, *haec* vero, si Terminus secundus est idem cum tertio, e. g. a:b = b:c, atque haec ita exprimitur, si sit *arithmetica*, ÷ a:b:c, ita vero, si sit *geometrica*, ∺ a:b:c.

6) COROLLARIVM. Proportionis *arithmeticae discretae* Formula est $a : a \pm d = b : b \pm d$ & *continuae* $\div a : a \pm d : a \pm 2d$. Quaelibet enim Proportio arithmetica *discreta* potest exprimi per $a : c = b : f$. Quodsi iam vtriusque Rationis differentia vocetur $= d$, erit $c = a \pm d$ & $f = b \pm d$ (praeced. 2 Coroll. II); hinc Proportio $a : c = b : f$ abit in hanc $a : a \pm d = b : b \pm d$. Similiter quaelibet Proportio *arithmetica continua* potest vocari $a : b = b : c$. Est vero rursus $b = a \pm d$ (ibid.); igitur substituendo erit $a : a \pm d = a \pm d : c$. Sed est etiam $c = a \pm d \pm d = a \pm 2d$ (ibidem), igitur erit substituendo $\div a : a \pm d : a \pm 2d$.

7) DEFINITIO. Progressio generatim est *Proportio continua continuata*: quae Proportio si fuerit *arithmetica* (praeced. 4), ipsa Progressio est *arithmetica*. e. g. $\div 2 : 4 : 6 : 8 : 10 : 12$ &c. atque haec est *ascendens* — vel *crescens* vel *diuergens*, si nimirum termini consequentes fuerint maiores antecedentibus. Secus erit *decrescens*, *descendens*, *conuergens*, e. g. $\div 12 : 10 : 8 : 6 : 4 : 2$.

8) COROLLARIVM. Progressionis arithmeticae Formula est $a : a \pm d : a \pm 2d : a \pm 3d : a \pm 4d : a \pm 5d$ &c. Id quod ex praecedentibus (6 & 7) patet.

9) COROLL. Ex formula praecedente liquet, in termino primo *a* non adesse differentiam $= d$. quemlibet subsequentem vero terminum haberi, si termino primo *a* vel addatur, vel ab eo subtrahatur differentia *d* toties sumta, quot sunt termini vno dempto.

dempto. Vnde si vocetur numerus omnium Terminorum $= n$, vltimus Terminus $= z$, erit $z = a \pm dn \mp d$. Atque haec est *formula generalis* pro quolibet Termino post primum *a*, cum quilibet post primum *a* possit spectari ceu vltimus $= z$; & in hac formula signa superiora valent pro *ascendente*, & *inferiora* pro *descendente*.

10) Coroll. Quia est $z = a \pm dn \mp d$, erit quoque $a = z \mp dn \pm d$, i. e. quilibet Terminus *nesimus* ab vltimo *z* est aequalis $z \mp dn \pm d$ i. e. $=$ termino vltimo *z*, toties *subtracta* (si Progressio fuerit *ascendens*), aut *addita* (si fuerit *descendens*), differentia, quot sunt Termini, vno dempto.

11) Theorema. *In omni Progressione arithmetica est Summa extremorum Terminorum = Summae duorum quorumque aequaliter vtrinque ab extremis distantium: & si Numerus Terminorum fuerit impar, duplo Termini medii.*

Demonst. Sint enim duo Termini Progressionis arithmeticae cuiuscunque *m* & *n*, aequaliter vtrinque ab extremis *a* & *z* (*m* quidem ab *a* & *n* a *z*) distantes, erit $m = a \pm dn \mp d$, & $n = z \mp dn \pm d$ (praeced. 9. 10) igitur est $m + n = a \pm dn \mp d + z \mp dn \pm d = a + z$ *quod erat primum.* Posito autem numero Terminorum impari, & medio Termino $= m$, erit *m* computatus a primo Termino $a = a \pm dn \mp d$ (9), & computatus ab vltimo *z* erit idem $m = z \mp dn \pm d$ (10); igitur $2m = a \pm dn \mp d + z \mp dn \pm d = a + z$, *quod erat alterum.*

12) Theo-

12) THEOREMA. *In quauis Progressione arithmetica est Summa omnium Terminorum = facto dimidio ex Summa extremorum in Numerum Terminorum.*

Demonstratio. Numerus Terminorum est vel *par* vel *impar*. Si *illud*, Numerus summularum binorum quorumque ab extremis aequaliter distantium Terminorum est = Numero *dimidio* Terminorum. Hinc si Summa extremorum $(a+z)$ ducatur in Numerum Terminorum *dimidium*, habetur Summa omnium Terminorum $= (a+z)\frac{n}{2}$.

Si vero Numerus Terminorum *n* est *impar*, erit $n-1$ i. e. numerus Terminorum, dempto Termino medio, numerus *par*; adeoque tunc Numerus Summularum binorum quorumque ab extremis aequaliter distantium est $= \frac{n-1}{2}$, & Summa harum $\frac{n-1}{2}$ Summularum est rursus = Summae extremorum $(a+z) \times \frac{n-1}{2}$. Sed huic Summae addi adhuddum debet Terminus medius, vt Summa omnium Terminorum habeatur. Hic autem est $= \frac{a+z}{2}$ (praeced. 11). Ergo Summa omnium Terminorum rursus est $= (a+z) \times \left(\frac{n-1}{2}\right) + \frac{a+z}{2} = (a+z)\frac{n}{2}$.

13) Co-

13) Coroll. Si ergo Summa extremorum vocetur $= a + z$ & Summa omnium Terminorum $= S$ & Numerus Terminorum $= n$, erit generaliter $S = (a+z)\frac{n}{2} = \frac{an+zn}{2}$.

14) Problema. Datis tribus ex his quinque Terminis *a*, *d*, *z*, *n*, *s*, qui in omni Progressione arithmetica occurrunt, inuenire reliquos.

Resolutio decem huius Problematis casuum continetur in subiecto Schemate, quod viginti *formulas* sistit, ex duabus formulis praemissis pro *z* & *s* facile eruendas. *) Tres dati Termini ponuntur in medio, iisque subiunguntur formulae pro inueniendis. Videlicet

Datis tribus
a . *d* . *n*
est

I $s = \frac{n}{2} . [2a \pm dn \mp d]$. II $z = a \pm dn \mp d$

---

*) E. g. vt habeatur formula tertia, quaeratur ex praefatis duabus formulis valor duplex incognitae *z*, erit inprimis $z = a \pm dn \mp d$. & ex formula $s = \frac{an+zn}{2}$ erit $z = \frac{2s-an}{n}$. Vnde est $a \pm dn \mp d = \frac{2s-an}{n}$, & hinc $an \pm dn^2 \mp dn = 2s - an$; vnde $2an \pm dn^2 \mp dn = 2s$. & hinc $n^2 + \frac{2an \mp dn}{\pm d} = \frac{2s}{\pm d}$
vel

a . d . s

$$\text{III}\quad n = -\frac{2a \pm d}{\pm 2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{\pm d} + \frac{a^2}{d^2} \mp \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)}$$

$$\text{IV}\quad z = \mp\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(a^2 \mp ad \pm 2ds + \frac{d^2}{4}\right)}$$

a . d . z.

$$\text{V}\quad n = \frac{z - a \pm d}{\pm d}$$

$$\text{VI}\quad s = \frac{z^2 \pm dz \pm ad - a^2}{\pm 2d}$$

---

vel $n^2 + \frac{2an}{\pm d} - n = \frac{2s}{\pm d}$. Vnde complendo quadratum erit $n^2 + \frac{2an}{\pm d} - n + \frac{a^2}{d^2} \mp \frac{a}{d} + \frac{1}{4} = \frac{2s}{\pm d} + \frac{a^2}{d^2} \mp \frac{a}{d} + \frac{1}{4}$ & extrahendo Radicem quadratam erit

$$n + \frac{2a}{\pm 2d} - \frac{1}{2} = \sqrt{\left(\frac{2s}{\pm d} + \frac{a^2}{d^2} \mp \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)}$$

& per Metathesin est

$$n = -\frac{2a}{\pm 2d} + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{\pm d} + \frac{a^2}{d^2} \mp \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)}$$

vel est

$$n = -\frac{2a \pm d}{\pm 2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2s}{\pm d} + \frac{a^2}{d^2} \mp \frac{a}{d} + \frac{1}{4}\right)}$$

Et sic de coeteris.

a . n . s

VII $d = \frac{2s - 2an}{\pm n^2 \mp n}$

VIII $z = \frac{2s - an}{n}$

a . n . z

IX $d = \frac{z - a}{\pm n \mp 1}$

X $s = \frac{an + zn}{2}$

a . s . z

XI $d = \frac{z^2 - a^2}{\pm 2s \mp a \mp z}$

XII $n = \frac{2s}{a + z}$

d . n . s

XIII $a = \frac{2s \mp dn^2 \pm dn}{2n}$

XIV $z = \frac{2s \pm dn^2 \mp dn}{2n}$

d . n . z

XV $a = z \mp dn \pm d$

XVI $s = \frac{n}{2} . [2z \mp dn \pm d]$

d . s . z

XVII $a = \pm\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{d^2}{4} \pm dz \mp 2ds + z^2\right]}$

XVIII $n = \frac{-2z \mp d}{\mp 2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{\mp d} + \frac{z^2}{d^2} \pm \frac{z}{d} + \frac{1}{4}\right]}$

n . s . z

XIX $a = \frac{2s - zn}{n}$

XX $d = \frac{2s - 2zn}{\mp n^2 \pm n}$

15) Probl. I. Inuenire Summam Progressionis arithmeticae numerorum naturalium 1 : 2 : 3 &c. in qua numerus Terminorum sit $= n$.

Resolutio. In eiusmodi Progressione *ascendente* semper est $a = 1$ & $d = 1$. Igitur cum cognita sint *a*, *d*, *n*, erit ex formula I $s = \frac{n}{2} . (2 + n - 1) = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$. Quodsi fiat Progressio *ascendens* ab 1 per solos impares ÷ 1 : 3 : 5 &c. erit $a = 1$, $d = 2$. Igitur $s = \frac{n}{2} . [2a \pm dn \mp d = \frac{2n + 2n^2 - 2n}{2} = n^2$. Si vero fiat Progressio ascendens per Numeros pares, ÷ 2 : 4 : 6 : 8 &c., erit $a = 2$ & $d = 2$; igitur $s = n^2 + n$.

Probl. II. Intra dies $= 5$ conficienda sint milliaria $= 25$ ita, vt numerus milliarium quouis die

die subsequente conficiendorum vnitate & dimidio maior sit numero milliarium die praecedente confectorum. Quaeritur, quot milliaria die primo sint conficienda?

Resol. Cum data sint $d = 1\frac{1}{2}$, $n = 5$ & $s = 25$ erit ex form. XIII $a = \frac{2s \mp dn^2 \pm dn}{2n} = \frac{20}{10} = 2$.
Inde Progressio est $2 : 3\frac{1}{2} : 5 : 6\frac{1}{2} : 8$.

Probl. III. Corpus libere cadens intra 1″ percurrat pedes 15: & quouis minuto secundo subsequente 30 pedibus plures, quam praecedente. Quaeritur, quot pedes percurrat decimo minuto secundo?

Resolutio. Cum sit $a = 15$, $d = 30$, & $n = 10$ erit $z = a \pm dn \mp d = 285$ pedibus.

Probl. IV. Corpus ex turri decidens vel in puteum aliquem incidens lapsui impendat 8″. Quaeritur, quanta sit altitudo turris, vel putei?

Resol. Sumatur hic, corpora intra 1″ libere lapsa percurrere pedes 15, & quolibet subsequo minuto secundo 30 pedibus plures, quam praecedente. Igitur est $a = 15$, $d = 30$ & $n = 8$. Ergo est $s = \frac{n}{2} . (2a \pm dn \mp d) = 960$ pedibus $= 160$ hexapetis.

Probl. V. Corpus ex altitudine $= 240$ pedum lapsum esto: quaeritur, quantum sit tempus lapsus?

Resol.

Resol. Sumto rursus, vt prius, esse a = 15, d = 30 & s = 240. erit n = $\sqrt{16}$ = 4.

PROBL. VI. Datis Progressionis cuiusuis arithmeticae tribus Terminis A . . . B . . . C, & in alia quacunque datis duobus Terminis, (vtraque Progressio sit vel *ascendens* vel *descendens*) a . . . b . . . x inuenire tertium *x*. Ignoramus vtriusque Progressionis differentia, ignoratur item distantia inter *A* & *B*, vti & inter *B* & *C*, ponitur autem inter *A* & *B*, *a* & *b* esse eandem distantiam, vti & inter *B* & *C*, *b* & *x*.

Resolutio. Sit differentia primae Progressionis = *D*, alterius = *d*, sitque numerus Terminorum ab *A* ad *B*, vti ab *a* ad *b* includendo semper hos ipsos = *m*, inter *B* & *C* vti & inter *b* & *x* = *n*. Erit ex formula z = a ± dn ∓ d = a + (d. (± n ∓ 1), erit inquam ex hac formula

$$B = A + (D.(\pm m \mp 1)$$
$$C = B + (D.(\pm n \mp 1)$$
$$b = a + (d.(\pm m \mp 1)$$
$$x = b + (d.(\pm n \mp 1)$$

Vnde ex prima aequatione est per Metathesin $B - A = D.(\pm m \mp 1)$ & $\frac{B - A}{\pm m \mp 1} = D$, & ex aequatione secunda est $\frac{C - B}{\pm n \mp 1} = D$; igitur aequalia vni tertio *D* sunt aequalia inter se, videlicet est $\frac{B - A}{\pm m \mp 1} = \frac{C - B}{\pm n \mp 1}$. Similiter ex tertia aequatione est $\frac{b - a}{\pm m \mp 1} = d$, & ex quarta est

$\frac{x-b}{\pm n \mp 1} = d$. Hinc rursus est $\frac{b-a}{\pm m \mp 1} = \frac{x-b}{\pm n \mp 1}$

Quia iam fractionum aequalium Numerationes sunt uti Denominatores,

erit $B-A : C-B = \pm m \mp 1 : \pm n \mp 1$ &

$b-a : x-b = \pm m \mp 1 : \pm n \mp 1$

Vnde quia rationes consequentes sunt aequales, erunt & antecedentes aequales, ergo est

$$B-A : C-B = b-a : x-b.$$

Inde factum extremorum aequale facto mediorum $(B-A) \times (x-b) = (C-B) \times (b-a)$. Vnde $x = \frac{(C-B)(b-a)}{B-A} + b$. liquet, *D. d. m. n.* non inueniri. E. g. sit $A = \frac{1}{3}$, $B = 1\frac{2}{7}$, $C = 7$, $a = 2$, $b = 8$, erit $x = 23$. Progressiones ipsae autem, quae ex datis inueniri non possunt, sunt hae: I $\frac{1}{3} : 1\frac{2}{7} : 2\frac{5}{21} : 3\frac{4}{21} : 4\frac{1}{7} : 5\frac{2}{21} : 6\frac{1}{21} : 7$

A . . . B C

II 2 : 5 : 8 : 11 : 14 : 17 : 20 : 23

a . . . *b* . . . . *x*

Prioris differentia est $= \frac{20}{21}$ & posterioris $= 3$.

PROBL. VII. Inuenire 4 Numeros integros in quauis Progressione arithmetica, cuius differentia sit Numerus integer, tales, vt cubus maximi sit = summae cuborum reliquorum.

Resol. Vocando Terminum primum x, differentiam = d, erunt quatuor Numeri x, $x+d$, $x+2d$, $x+3d$. iam est ex conditione data $x^3 + (x+d)^3 + (x+2d)^3 = (x+3d)^3$. Igitur calcu-

calculum instituendo erit $x^3 + x^3 + 3dx^2 + 3d^2x + d^3 + x^3 + 6dx^2 + 12d^2x + 8d^3$, & reductione facta est $3x^3 + 9dx^2 + 15d^2x + 9d^3 = x^3 + 9dx^2 + 27d^2x + 27d^3$, per Metathesin iam est $2x^3 - 12d^2x = 18d^3$. Vnde $x^3 - 6d^2x = 9d^3$

posito iam	d =	1	2	3	4	5	6	tentando *)
reperietur	x =	3	6	9	12	15	18	, & iam
erit terminus	2dus =	4	8	12	16	20	24	
	3tius =	5	10	15	20	25	30	
	4tus =	6	12	18	24	30	36	

generaliter autem soluitur aequatio $x^3 - 6d^2x = 9d^3$ si fiat $x = 3d$. Namque est tunc $x^3 = 27d^3$ & $6d^2x = 18d^3$. Vnde $27d^3 - 18d^3 = 9d^3$. Igitur habentur quaesiti Numeri, siue *d* sit integer, siue fractus. videlicet I. 3d. II. 4d. III. 5d. IV. 6d. Vnde dato quolibet inueniuntur reliqui. E. g. sit datus I $= a$ erit $a = 3d$ & hinc $d = \frac{a}{3}$. Vnde

Numerus I est $= a$ II $= a + \frac{a}{3} = \frac{4a}{3}$ III $= \frac{5a}{3}$

IV $= \frac{6a}{3} = 2a$.

Capvt

*) Nempe substituendo pro x varios valores, donec satisfiat aequationi; v. g. dum ponitur $d = 2$, inter Numeros 4 . 5 . 6, qui pro x tentando substitui possunt, solus 6 soluit quaestionem.

CAPVT II.

DE PROGRESSIONE GEOMETRICA.

16) PROBLEMA. Construere Formulam generalem Rationis *geometricae.*

Resolutio. Quilibet antecedens Terminus Rationis geometricae potest vocari $= a$, & consequens $= b$, & exponens $= q$. Quia iam Exponens q est $= \frac{b}{a}$, erit $b = aq$, adeoque Rationis *geometricae* Expressio generalis est $a : aq$, videlicet consequens b semper est $=$ antecedenti a. ducto in Exponentem $= q$, id quod ex ipsa definitione Rationis geometricae superius (1) data fluit.

17) PROBLEMA. Construere Formulam generalem *Proportionis geometricae.*

Resolutio. Proportio geometrica *discreta* potest exprimi per $a : c = b : d$, sed est $c = aq$ & $d = bq$ (praeced.) ergo substituendo prouenit $a : aq = b : bq$ Formula Proportionis geometricae *discretae.* Similiter quaelibet Proportio geometrica continua potest exprimi per $\div a : b : c$ sed rursus est $b = aq$ & $c = bq = aq^2$ igitur substituendo est cuiusuis Proportionis geometricae *continuae* formula „$\div a : aq : aq^2$.

18) DEFINITIO. Proportio geometrica continua continuata est Progressio *geometrica*, e. g. $2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128$; atque haec est vel *ascendens*, cuius nimirum termini consequentes sunt

ma-

maiores antecedentibus, vel *decrescens*, cuius termini consequentes sunt minores antecedentibus. E. g. $128 : 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2$ est Progressio geometrica descendens, cuius Exponens est $= \frac{1}{2} = \frac{64}{128}$ $= \frac{32}{64}$ &c.

19) Coroll. Formula igitur Progressionis geometricae est $a : aq : aq^2 . aq^3 : aq^4 . . . . z.$

20) Coroll. Ex qua Formula liquet, in Termino primo *a* non adesse Exponentem $= q$, quemlibet subsequentem Terminum vero haberi, si proxime praecedens multiplicetur per Exponentem $= q$; adeoque *q* occurrit in quolibet subsequente Termino, eiusque Exponens semper est = Numero Terminorum vnitate multato. Si igitur Numerus Terminorum sit $1, 2, 3, 4 . . . . n-2, n-1, n$, Formula Progressionis erit $a : aq : aq^2 : aq^3 . . . aq^{n-3} : aq^{n-2} : aq^{n-1}$. Vnde si Terminus vltimus dicatur $= z$, erit $z = aq^{n-1}$ i. e. quilibet Terminus *zesimus* a primo *a* est $= aq^{n-1}$.

21) Coroll. Vnde $a = \frac{z}{q^{n-1}}$ i. e. quilibet Terminus *aesimus* ab vltimo z est $= \frac{z}{q^{n-1}}$.

22) Coroll. Vnde si sint duo Termini Progressionis *geometricae* cuiuscunque *m* & *n*, aequaliter vtrinque ab extremis *a* & *z* (*m* quidem ab *a* & *n* a *z*) distantes, erit $m = aq^{n-1}$ & $n = \frac{z}{q^{n-1}}$. Vnde $mn = aq^{n-1} \times \frac{z}{q^{n-1}} = az$, i. e. *in omni Pro-*

gressione

gressione geometrica est Factum extremorum = *Facto duorum quorumlibet aequaliter ab extremis distantium.* Et si Numerus Terminorum Progressionis sit *impar*, & ponatur medius terminus = *m*, erit *m* computatus a primo *a* = aq^{n-1}, & computatus ab vltimo $z = \frac{z}{q^{n-1}}$. Vnde est $m^2 = aq^{n-1} \times \frac{z}{q^{n-1}} = az$ id est, in hoc casu est *Factum extremorum* = *quadrato medii.*

23) Coroll. Quilibet igitur Terminus in semetipsum ductus & per primum diuisus, dat Terminum a se distantem tantum, quantum ipse distat a primo. Namque quilibet eiusmodi Terminus potest spectari vt medius. Quadratum autem *medii* est = facto extremorum *az*; igitur quadratum medii, diuisum per primum *a*, dat Terminum *z*, a medio tantundem distantem, quantum ipse medius a primo distat.

24) Coroll. Intelligitur inde modus, inueniendi in Numeris quemcunque Progressionis Terminum. E. g. si in Progressione hac 2:4:8 .... quaeratur Terminus decimus, fiat $\frac{8 \times 8}{2} = \frac{64}{2} = 32$ = Termino quinto. Dein $\frac{32 \cdot 32}{2} = \frac{1024}{2} = 512$ = Termino nono. Multiplicetur iam Terminus hic nonus per Exponentem datae Progressionis = 2, & habebitur Terminus quaesitus decimus 1024. Si priori operatione obtentus fuisset Terminus quaesito altior, per se patet, eum conuerti in quaesitum, si per Exponentem Progressionis datae toties diuida-

tur, quoties opus est. E. g. Si obtentus fuisset Terminus *vndecimus*, diuidatur is semel per Exponentem Progressionis datae, & habebitur Terminus quaesitus *decimus*.

25) Theorema. *In qualibet Progressione geometrica est Summa antecedentium ad Summam consequentium, vti quilibet antecedens ad suum consequentem.*

Demonstratio. Quodsi plures Rationes geometricae fuerint aequales, erit Summa antecedentium ad Summam consequentium, vti quiuis antecedens ad suum consequentem. Namque si sit $a:aq = b:bq = c:cq = d:dq$, euidens est esse $a+b+c+d : aq+bq+cq+dq = a:aq = b:bq = c:cq = d:dq$ ob eundem Exponentem $= q$. Iam vero Termini Progressionis geometricae procedunt in Rationibus continuis aequalibus, vti ex definitione eius (18) liquet: ergo omnes sunt antecedentes, excepto vltimo z, & omnes sunt consequentes, excepto primo a. Igitur si Summa omnium Terminorum vocetur $= S$, erit Summa antecedentium $= S-z$ & Summa consequentium $= S-a$. Vnde est etiam $S-z : S-a := a:aq$.

26) Coroll. Hinc est $S = \frac{qz-a}{q-1}$. Namque si in praefata Proportione $S-z : S-a = a:aq$ fiat factum extremorum = facto mediorum, erit $Saq - aqz = aS - a^2$ & diuidendo singulos vtriusque membri aequationis Terminos per factorem communem a, prouenit $Sq - qz = S - a$. Vnde est

est $Sq - S = qz - a$ & hinc $S = \frac{qz - a}{q - 1}$. Idem cl. LORENZ ita quoque demonstrat: est

$$S = a + aq + aq^2 \ldots + aq^{n-1}$$

hinc vtrumque membrum aequationis multiplicando per *q* prouenit

$$Sq = aq + aq^2 \ldots + aq^{n-1} + aq^n$$

Subtrahendo iam primam aequationem ab hac altera prouenit $Sq - S = aq^n - a$ & hinc

$S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{qz - a}{q - 1}$ (. Nam $qz = q \cdot aq^{n-1} = aq^n$).

27) THEOREMA. In Progressione geometrica est Terminus primus ad vltimum, sicut primus eleuatus ad Potentiam Numero Terminorum Vnitate minorem est ad secundum eleuatum ad eandem Potentiam.

Demonstr. Progressio quaelibet geometrica $a : b : c \ldots z$ potest exhiberi formula $a : aq : aq^2 \ldots aq^{n-1}$ est vero in hac Progressione $a : aq^{n-1} = a^{n-1} : (aq)^{n-1} = a^{n-1}\, q^{n-1}$ ob eundem Exponentem q^{n-1}, ergo est etiam $a : z = a^{n-1} : b^{n-1}$.

28) PROBLEMA. Datis tribus ex his quinque *a*, *q*, *n*. *s*, *z* inuenire reliqua.

Resolutio. Sunt huius Problematis casus *decem*, vti supra in Progressione *arithmetica*. Sed nonnulli sunt Algebrae *elementari* (quae, quod solutionem Problematum gradus *adfecti* attinet,

tinet, solius tantum *secundi* gradus *adfecti* Problemata soluendi Principia tradit) insolubiles, & nonnulli ope *logarithmorum*, (de quibus deinceps) solvuntur. Singulos sequens Schema sistit. Terminos datos sistit columna *media*, & valor incognitorum in subiectis Formulis generalibus, quae ex Formulis $z = aq^{n-1}$ & $S = \frac{qz-a}{q-1}$ facile deducuntur, continetur. Litera *l* denotat *logarithmum*, cuius licet indoles infra demum exponatur, heic tamen & formulas, ope *logarithmorum* constructas damus, vt Schema sit completum. Tyrones eas, donec Theoria *logarithmorum* fuerint imbuti, praetereant.

Datis

a . n . q

erit

I $s = \frac{aq^n - a}{q - 1}$ II $z = aq^{n-1}$

a . n . s

q & *z* non obtinentur.

a . n . z

III $q = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$ vel. $l, q = \frac{l. z - l. a}{n - 1}$

IV $s = \frac{z\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}) - a}{\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}) - 1}$

a . q . s

V $n = \frac{l.(qs - s + a) - l.a}{l.q}$ VI $z = \frac{a + sq - s}{q}$

a . q . z

VII. $n - 1 = \frac{l.z - l.a}{l.q}$ VIII $s = \frac{qz - a}{q - 1}$

a . s . z

IX $n - 1 = \frac{l.z - l.a}{l.(s-a) - l.(s-z)}$ X $q = \frac{s - a}{s - z}$

n . q . s

XI $a = \frac{sq - s}{q^n - 1}$ XII $z = \frac{sq^n - sq^{n-1}}{q^n - 1}$

n . q . z

XIII $a = \frac{z}{q^{n-1}}$ XIV $s = \frac{q^n z - z}{q^n - q^{n-1}}$

n . z . s

a & *q* non obtinentur.

q . s . z

XV $a = qz - qs + s$ XVI $n - 1 = \frac{l.z - l.(qz - qs + s)}{l.q}$.

29) Probl. I. Titius ludo exponit crucigeros tres. Hunc ludum decies repetiturus, ita, vt qualibet vice subsequente duplum pecuniae prioris exponat, quaerit, quantum pecuniae decima vice sibi sit exponendum?

Res.

Ref. Cum sit $a = 3$, $q = 2$, & $n = 10$ erit ex Formula II. $z = 1536$ crucigeris. & $S = 3069$ crucig.

PROBL. II. Caius equum generosum Titio venditurus petit 200 Nummos Carolinos. Quod pretium cum Titio iusto maius videretur, Caius ait: Solue mihi equum meris obolis hac lege, vt pro primo clauo soleari des obolum *vnum*, pro secundo *duos*, pro tertio *quatuor*, & sic porro. Sunt vero *claui* numero 24. Annuit Titius, Matheseos ignarus, quaeritque iam, quantum debeat soluere?

Resolut. Cum sint data $a = 1$, $q = 2$, $n = 24$ erit ex Formula I $S = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{2^{24} - 1}{1} = 16777215$ obolis, qui oboli si redigantur in crucigeros, & crucigeri in florenos, patebit, emtorem egregie fuisse deceptum.

30) COR. In Progressione geometrica descendente in infinitum, cum recte ponatur $z = \frac{1}{\infty} = 0$, Formula VIII $S = \frac{qz - a}{q - 1}$ abit in hanc $S = \frac{-a}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}$. Sed quia z in rigore mathematico non est $= 0$, patet, neque Summam $\frac{a}{1 - q}$ esse veram in rigore Summam seriei (quae nunquam inueniri potest) sed esse hac minorem quantitate *omni dabili minore*, i. e. *infinite parua*, adeoque citra defectum notabilem eidem aequiparari.

31)

31) THEOREMA. *In Progressione geometrica descendente in infinitum fractionum, quarum Numerator est constans, denominatores vero sunt Potentiae naturales primi denominatoris, est Summa aequalis fractioni, cuius Numerator est ipse seriei constans; denominator vero a primi Termini denominatore sola vnitate deficit.* i. e. Progressionis $\div \frac{a}{b} : \frac{a}{b^2} : \frac{a}{b^3} \ldots \frac{a}{b^\infty}$ est Summa $S = \frac{a}{b-1}$.

Demonstratio. Ex praecedente (30) est hic $S = \frac{a}{1-q} = \frac{a}{b} : \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b} : \left(\frac{b-1}{b}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{b}{b-1} = \frac{ab}{b^2-b} = \frac{a}{b-1}$. E. g. $\div \frac{3}{7} : \frac{3}{49} \ldots$ Summa S est $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

32) COROLL. Vnde si in primo Termino Numerator sola Vnitate minor est Denominatore, erit Progressio $\div \frac{a}{a+1} : \frac{a}{(a+1)^2} : \frac{a}{(a+1)^3} \ldots \frac{a}{\infty}$; & $S = \frac{a}{a} = 1$: v. g. $\div \frac{3}{4} : \frac{3}{16} \ldots$ fit $S = 1$.

33) COROLL. Patet inde porro modus, fractionem decimalem, in qua Periodus certarum Notarum perpetuo redit, ad vulgarem reducendi. E. g. est $0{,}636363 \ldots = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} \ldots = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ (31).

34) PROBL.

34) PROBLEMA. Inuenire Summam Progressionis descendentis in infinitum, in qua Termini positiui cum negatiuis alternant, *e. g.* huius $am : - am^2 : + am^3 : - am^4 : + am^5 \ldots \frac{1}{\infty}$ vbi *m* ex hypothesi sit fractio propria.

Resol. Est $S = am - am^2 + am^3 \ldots \frac{1}{\infty}$, quae aequatio si ducatur in *m*, erit $Sm = . + am^2 - am^3 \ldots - \frac{1}{\infty}$. facta additione vtriusque aequationis, erit $Sm + S = am$. inde $S = \frac{am}{m+1}$. Posito $m = \frac{1}{x}$ erit $S = \frac{a}{x+1}$.

35) PROBL. Inuenire Series Potentiarum Numerorum naturalium, quorum nempe differentia est $= 1$.

Resol. Sint hi Numeri *a*, *b*, *c*, *z* &c. erit

$$\left\{\begin{array}{lll} b = a + 1 & & b^2 = a^2 + 2a + 1 \\ c = b + 1 & \text{hinc} & c^2 = b^2 + 2b + 1 \\ z = c + 1 & & z^2 = c^2 + 2c + 1 \end{array}\right.$$

n de substitutis Valoribus fit $z^2 = a^2 + 2.(a+b+c) + 3$. Cumque hic Numerus $+ 3$ sit semper Numerus Terminorum vno dempto, erit hic $= n - 1$. Vnde iam $z^2 = a^2 + 2.(a+b+c) + n - 1$. Est autem vltimus Terminus $z = a + n - 1$. hinc $z - a = n - 1$. ergo $z^2 = a^2 + 2.(a+b+c) + z - a$. demum $a+b+c$ &c. $=$ Summae omnium antecedentium $=$ Summae omnium Terminorum *s* dempto Termino vltimo $z = s - z$. Igitur

$z^2 =$

$z^2 = a^2 + 2s - 2z + z - a$. Igitur $s = \frac{z^2 + z - a^2 + a}{2}$ = *Summae Radicum.*

Ita porro fiat $\begin{cases} b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \\ c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1 \\ z^3 = c^3 + 3c^2 + 3c + 1 . \end{cases}$

erit (ſubſtitutione facta, & pro 3 ponendo vt antea $= z - a$),

$$\left.\begin{array}{l} z^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \\ \quad + 3b^2 + 3b + 1 \\ \quad + 3c^2 + 3c + 1 \end{array}\right\} = z^3 = a^3 + 3.(a^2 + b^2 + c^2) + 3.(a + b + c)$$

$+ 3 = 3s^2 + 3z^2 + 3s - 3z + z - a + a^3$. Igitur

$$s^2 = \frac{2z^3 + 3z^2 + z - 2a^3 + 3a^2 - a}{6}$$ = *Summae quadratorum Numerorum naturalium.* Similiter reperitur $s^3 = \frac{z^4 + 2z^3 + z^2 - a^4 + 2a^3 - a^2}{4}$ = *Summae Cuborum eorundem Numerorum* . &

$$s^4 = \frac{6z^5 + 15z^4 + 10z^3 - z - 6a^5 + 15a^4 - 10a^3 + a}{30}$$

= *Summae de quarta Potentia Numerorum naturalium.* Et ſic porro pro Summa in quauis Potentia.

36) Coroll. Si fuerit $a = 0$, vel $a = 1$, tum in prioribus Formulis omnes Termini de a fiunt $= 0$, & Formulae habentur per ſolos Terminos de z, vti patet. Igitur $s = \frac{z^2 + z}{2}$, &

$s^2 =$

$$s^2 = \frac{2z^3 + 3z^2 + z}{6} \quad \& \quad s^3 = \frac{z^4 + 2z^3 + z^2}{4} \quad \&$$

$$s^4 = \frac{6z^5 + 15z^4 + 10z^3 - z}{30} \quad \&c.$$

Conf. cl. DE LA CAILLE Lectiones elementares mathematicae seu Elementa Algebrae in Latinum traductae §. 373 seq.

DISSER-

DISSERTATIO V.

DE LOGARITHMIS.

Exposita Progressionis arithmeticae & geometricae Theoria restat, vt & Theoriam Logarithmorum, quantum pro Instituti nostri ratione satis est, eorumque insignem vsum exponamus. Logarithmi etenim, vt ex sequentibus patebit, ex coniunctione Progressionis *arithmeticae*, & *geometricae* oriuntur. Sit igitur

CAPVT I.

DE LOGARITHMORVM INDOLE.

I. PROPOSITIO. *Quilibet Numerus, ceu ratio Multitudinis ad Vnitatem* (als ein Verhältniß der Menge zur Einheit) *spectari potest*. Quilibet enim Numerus est Quantitas ex Vnitatibus, seu monadibus composita (defin.) ergo quiuis etiam rationem Multitudinis ad Vnitatem inuoluit, licet haec ratio non adperte exprimatur. Sic v. g. numerus 3 inuoluit rationem 1 : 3 & generatim numerus *n* rationem 1 : n.

II. COROLL. Quilibet ergo terminus in progressione geometrica 1 : 10 : 100 : 1000, vel in quacunque alia, denotat rationem eiusdem termini ad Vnitatem.

III.

III. Prop. Quaelibet Progressio geometrica, cuius terminus primus ponitur $= 1 = a^0$ & secundus $= a$, naturales termini secundi potentias continet, quarum exponentes sunt numeri naturales 1, 2, 3, 4 &c., in progressione arithmetica procedentes.

Demonst. Euidens est, esse 1) $a^0 : a^1 : a^2 : a^3 \ldots a^n : a^{n+1} : a^{n+2}$ &c. ob eundem exponentem $= a$, & 2) esse $1 : 2 : 3 : 4 \ldots n : n+1 : n+2$ ob eandem differentiam $= 1$.

IV. Defin. Progressionis geometricae $a^0 : a^1 : a^2 : a^3$ &c. ratio $a^0 : a^1$ siue $1 : a$ vocatur *Basis* (Grundverhältniß) omnium reliquarum rationum (II.) eoquod omnes reliquae rationes ex illa oriuntur. Sic e. g. terminus praefatae progressionis a^3 siue ratio $1 : a^3$ (II.) est ratio triplicata Baseos $1 : a$ & a^2 ratio duplicata eiusdem.

V. Coroll. 1) Mutata Basi progressionis geometricae, omnes rationes subsequentes mutentur, necesse est.

Coroll. 2) Exponentes Potentiarum in progressione geometrica (IV.) occurrentes & progressionem arithmeticam constituentes (III.) indicant, quoties ratio fundamentalis $1 : a$ in data quauis ratione eiusdem progressionis geom. contineatur, siue quotuplicata ratio *Baseos* sit quaeuis ratio data progressionis. (Sie bedeuten eigentlich das Vielfache eines und eben desselben Grundverhältnisses). Sic e. g. exponens $= 3$ termini a^3, seu rationis $1 : a^3$ (II.) significat, esse termi-

terminum a^3, ſeu rationem $1 : a^3$ triplicatam rationem *baſeos* $1 : a$, & generatim exponens *n* termini cuiuscunque a^n, ſeu rationis $1 : a^n$ indicat, eandem hanc rationem $1 : a^n$ eſſe *neſies* multiplicatam rationem Baſeos $1 : a$. Inde patet ratio, cur

VI. Def. Exponentes numerorum, in progreſſione geom. procedentium, & progreſſionem arithmeticam conſtituentes, horum ipſorum, geometrice continue proportionalium numerorum, *logarithmi* compellentur (λογων αριθμοι Zahlen der Verhältniſſe). Exprimi autem logarithmi ſolent vel litera initiali *l*. vel per *log*. Vnde ſi ſtatuatur Progreſſio geometrica $a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4$ &c. & ſumatur Quantitas fundamentalis i. e. *Baſis* $a > 1$ *v. g.* $= 10$, eum in finem, vt ad diuerſas ſenſim potentias eleuata generet quantitates alias, in progreſſione geometrica procedentes, e. g.

vt ſit $\begin{cases} a^0 = 1 = b \\ a^1 = 10^1 = c \\ a^2 = 10^2 = 100 = d \\ a^3 = 10^3 = 1000 = e \end{cases}$ & generatim $a^m = f$.

vbi $b : c : d : e : f$ ſiue $1 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4$ &c. eſt Progreſſio geometrica,

erit $\begin{cases} 0 = \log. a^0 = \log. 1 = \log. b \\ 1 = l. a^1 = l. 10 = l. c \\ 2 = l. a^2 = l. 100 = l. d \\ 3 = l. a^3 = l. 1000 = l. e \end{cases}$ & $m = l. f$.

& quia zeri decimales, quotcunque adiiciuntur, non augent numerorum valorem, his logarithmis, ex ratione inferius reddenda, ſeptem adhuc zeri decimales adiici ſolent, adeo, vt $\log. a^0$, ſiue log.

log. 1 = l. b sit = 0,0000000, & log. a^1 = l. 10 sit = 1,0000000 &c. Septem hae notae decimales Logarithmi *Mantissa*; vltima vero nota sinistima, virgula a septem notis decimalibus separata, eiusdem characteristica audit, perpetuo vnitate minor, quam numerus notarum, ex quibus numerus, dato logarithmo respondens constat.

VII. Coroll. 1) Vnde ex characteristica logarithmi mox intelligitur, quot Notae sint in Numero respondente, & cuius Valoris. Item dato numero, scitur logarithmi respondentis characteristica.

Coroll. 2) Quoniam logarithmi sunt ipsi Exponentes Potentiarum, in Progressione geom. procedentium, quantitatis, ceu Baseos (Grundzahl) adsumptae $a > 1$, consequens est, ea omnia, quae de Exponentibus adsumptae, & ad diuersas potentias eleuatae quantitatis *a* valent, etiam de logarithmis ipsis valere. Vnde

VIII. Theorema. *Si logarithmi factorum adduntur, habetur logarithmus facti.*

Demonst. Sit enim $a^m = c$, & $a^n = d$, erit $m = l.c$ & $n = l.d$. (VI.) est autem $a^m \times a^n = a^{m+n} = cd$, hinc $m + n = l.cd$. & substituendo Valores pro $m + n$, erit $l.c + l.d = l.cd$. Sic similiter est $l.bcd = l.b + l.c + l.d$. Fiat enim $bc = x$ erit $l.bcd = l.dx = l.d + l.x$ (ex Demonst.) est vero $l.x = l.bc = l.b + l.c$ (ex Demonst.) ergo etiam est log. facti $bcd = l.b + l.c + l.d$. *Vnde Multiplicatio peragitur ope logarithmorum*

morum sola additione. e.g. vt fiat 76×304, addantur horum factorum logarithmi (quos iam inuentos &, substrata basi 1 : 10, determinatos esse, infra dicetur) qui sunt 1,8808136 & 2,4828736, summa erit = 4,3636872 & Numerus huic log. in Tabulis logarithmorum respondens est = 23104 = facto quaesito.

IX. Theor. *Logarithmus diuisoris, subtractus a Logarithmo diuidendi, dat Logarithmum Quoti.*

Demonst. Sit ex hyp. $\left.\begin{array}{l} a^m = b \\ a^n = c \end{array}\right|$ erit $\begin{array}{l} m = l.\, b \\ n = l.\, c \end{array}$

(VI.) sed est $\frac{b}{c} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ hinc $m - n = l.\frac{b}{c}$ &, substituendo, $l.\, b - l.\, c = l.\frac{b}{c}$. Vnde, vt e. g. diuidatur 7336 per 56, subtrahatur log. diuisoris 56, qui est = 1,7481880 a logarithmo diuidendi = 3,8654593 & differentia 2,1172713 est log. quoti, cui respondet in tabulis logarithmicis numerus 131 = quoto quaesito. Diuisio ergo ope Logarithmorum peragitur sola subtractione.

X. Theor. *Vt Regula trium ope logarithmorum fiat, addantur logarithmi terminorum mediorum, & subtrahatur logarithmus primi termini.*

Demonst. Cum sit ex hyp. $a : b = c : x$ (Reg. trium) erit $x = \frac{bc}{a}$, vnde & log. $x = l.\frac{bc}{a} = l.\, b + l.\, c - l.\, a$ (VIII. IX). e. g. sit $2843 : 8529 = 3147 : x$, erit $x = \frac{8529 \times 3147}{2843} = 9441$. Verum,

recte

recte monente cl. DE LA CAILLE, operatio haec longa est (praesertim si numeri maiores occurrant) nec errandi periculo caret, nisi magna adhibeatur attentio. Sed si logarithmis vtamur, solum opus est, vt numerorum 8529 & 3147 logarithmi, scilicet 3,93090 & 3,49790 addantur, & a summa 7,42880 auferatur 3,45378 logarithmus numeri 2843, residuo 3,97502, quod est logarithmus quaesiti x, in Tabulis respondet numerus 9441.*)

XI. THEOR. *Logarithmus radicis datae, ductus in Exponentem Potentiae quaesitae, dat Logarithmum potentiae quaesitae.*

Demonst. Sit radix data $a^m = b$, eleuanda ad potentiam *resimam*. erit $m = l.b$ (VI.) & $a^{mr} = b^r$. hinc $m r = l.\ b^r$ (VI.) sed $m = l.\ b.$ hinc $l.b. \times r = l.\ b^r$. Eleuatio ergo ad potentias ope logarithmorum peragitur simplici multiplicatione. e. g. vt eleuetur numerus 8 ad potentiam quartam, ducatur eius logarithmus 0,90309 in 4, factum 3,61236 est log. numeri 4096, seu quartae potentiae numeri 8.

PROBL.

---

*) Quantitates aequales $x = \frac{bc}{a}$ habent etiam logarithmos aequales. Cum enim ex dictis (VI.) logarithmi sint ipsi exponentes numerorum in progressione geom. procedentium: exponentes autem hi semper sint aequales, si ipsae quantitates, seu potentiae, quarum exponentes sunt, sint eaedem, consequens est, numerorum aequalium semper esse etiam logarithmos aequales. cf. V. Coroll. 2.

XII. PROBL. 1. Sit aequatio $a^x c^{qx} = b^{mx-n}$, & quaeratur x.

Resol. Cum sit $a^x c^{qx} = b^{mx-n}$; erit etiam $l. a^x c^{qx} = l. b^{mx-n}$ hinc $l. a \times x + l. c \times qx = l. b \times mx - l. b \times n$ (VIII. & XI.) & per Metathesin: $l. b \times n = l. b \times mx - l. a \times x - l. c \times qx = x (l. b . m - l. a - l. c . q)$ vnde $x = \frac{l. b \times n}{l. b. m - l. a - l. c. q}$

PROBL. 2. Ex aequatione $a^{\frac{x}{m}} = c^n$ inuenire x.

Resol. Est $l. a^{\frac{x}{m}} = l. c^n$. Sed est $l. a^{\frac{x}{m}} = l. a \times \frac{x}{m}$ igitur $\frac{x}{m} = \frac{l. c. n}{l. a.}$ & $x = \frac{l. c. m n}{l. a.}$.

PROBL. 3. Inuenire numerum x, qui ductus in $\frac{64}{5}$ sit = potentiae *xesimae* numeri 4.

Resol. Ex conditione data est $\frac{64x}{5} = 4^x$

Vnde log. 64 + log. x − log. 5 = log. 4 . x. & per Metathesin: l. 64 − l. 5 = l. 4 × x − l. x. Est vero log. 64 = 1,8061800 & log. 5 = 0,6989700 & log. 4 = 0,6020600. Hinc substituendo est 1,8061800 − 0,6989700 = 1,10721 = 0,60206 . x − l. x. si iam fiat x = 2, erit 0,60206 . x − l. x = 0,90309 < 1,10721. si vero fiat x = 3, erit 0,60206 . x − l. x = 1,3290587 > 1,10721 vnde est x > 2 & < 3. Fiat igitur

x =

$x = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$, erit, calculo instituto $1,10721 = 0,60206 . x = 1. x.$ hinc Numerus quaesitus $x = 2,5 = \frac{5}{2}$.

XIII. Theorema. *Logarithmus potentiae, diuisus per exponentem radicis quaesitae dat logarithmum radicis quaesitae.* Vnde extractio radicum ope logarithmorum peragitur sola simplici diuisione.

Demonst. Sit ex hyp. $a^m = b$, ergo erit etiam $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{b} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b}$. Hinc $\frac{m}{n} = l. \sqrt[n]{b}$. Est vero $m = l. b$. quia ex hyp est $a^m = b$ (VI.). Hinc $\frac{l. b}{n} = l. \sqrt[n]{b}$. v. g. vt extrahatur radix cubica ex 6859, huius numeri logarithmus 3,83626 diuidatur per 3, Quotus 1,27875 est logarithmus radicis quaesitae, cui respondet in Tabulis numerus 19.

XIV. Problema. Sint, vt supra (in Progress. arith. 15. VI), dati Termini tres in Progressione geometrica A . . . B . . . C & in alia quacunque dati sint duo a . . . b . . . x Progressionis primae Exponens sit $= Q$, & alterius $= q$, Distantia *B* ab *A*, vti & *b* ab *a* sit $= m$, & Distantia *C* a *B* vti & *x* a *b* sit $= n$. quaeritur *x*.

Resolutio. Ex formula generali pro Termino vltimo Progressionis geometricae est $z = aq^{n-1}$. Hinc

Hinc est $B = A Q^{m-1}$, & $C = B Q^{n-1}$, item $b = a q^{m-1}$ & $x = b q^{n-1}$. Vnde est $\frac{B}{A} = Q^{m-1}$ & $\frac{C}{B} = Q^{n-1}$ & $\frac{b}{a} = q^{m-1}$ & $\frac{x}{b} = q^{n-1}$. Hinc porro est $\sqrt[m-1]{\frac{B}{A}} = Q$ & $\sqrt[n-1]{\frac{C}{B}} = Q$ adeoque $\sqrt[m-1]{\frac{B}{A}} = \sqrt[n-1]{\frac{C}{B}}$. (Nam aequalia vni tertio Q sunt aequalia inter se). Pariter hinc porro est $\sqrt[m-1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n-1]{\frac{x}{b}} = q$. adeoque est $\frac{l.B - l.A}{m-1} = \frac{l.C - l.B}{n-1}$ & $\frac{l.b - l.a}{m-1} = \frac{l.x - l.b}{n-1}$ (IX. XIII.). Vnde $l.B - l.A : l.C - l.B = l.b - l.a : l.x - l.b$ Nam duarum fractionum aequalium Numeratores sunt, vti Denominatores; ergo est $l.B - l.A : l.C - l.B = m-1 : n-1$. ex eadem ratione est $l.b - l.a : l.x - l.b = m-1 : n-1$. Vnde cum Rationes consequentes sint aequales, erunt & antecedentes aequales, adeoque est $l.B - l.A : l.C - l.B = l.b - l.a : l.x - l.b$. Igitur est factum extremorum aequale facto mediorum, $\frac{(l.C - l.B.) \times (l.b - l.a)}{l.B - l.A} = l.x - l.b$, adeoque est $l.x = \frac{(l.C - l.B).(l.b - l.a)}{l.B - l.A} + l.b$.

XV. Cor. I. Ex eo, quod est ex hyp. $a > 1$, & $\frac{a^m}{a^n} = \frac{b}{c} = a^{m-n}$ & $m-n = \log. \frac{b}{c}$, consequitur, A) vt, si m & n sint numeri positiui, & $m > n$, sit etiam $m-n$ quantitas positiua, & vt sit $\frac{b}{c} > 1$; hinc logarithmi omnium Numerorum, vnitate maiorum sunt numeri positiui. B) Si ponatur $m = n$, erit $m - n = o$, & hinc $a^{m-n} = a^o = \frac{b}{c} = 1$. Hinc logarithmus Vnitatis semper est $= o$, quia est $o = l. a^o = l. 1$. C) Si vero sit $m < n$, erit $m - n$ numerus negatiuus, & $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = \frac{b}{c}$ erit fractio propria. Est vero $m - n = \log. \frac{b}{c}$ ergo fractionis propriae logarithmus semper est negatiuus.

Coroll. II. Cum ope Logarithmorum omnis multiplicatio simplici additione, diuisio subtractione, eleuatio numerorum ad Potentias multiplicatione, & extractio Radicum diuisione peragatur; *) &

---

*) *Additio* & *Subtractio* ope logarithmorum peragi nequeunt. Namque si velles partibus *addendis* praefigere logarithmos, id indicio esset, partes ipsas inter se esse *multiplicata*. e. g. Expressio haec l. a + l. b indicat, esse *a* ductum in *b* (VIII) adeoque si sit *b* ad *a* addendum, non potes scribere l. a + l. b. Pariter l. a — l. b denotat, esse *a* diuisum per *b* (IX), adeoque si sit *b* sub-

& nonnulla insuper Problemata, superius (XII, & in Progress. geom. 28) posita, ope logarithmorum facile soluantur, quorum soluendorum *Algebrae elementaris* Regulas non statuit, ingens calculi Logarithmici Compendium & insignis eius vtilitas suopte patescit. Sed calculus hic absque Tabulis, seu canone Logarithmorum institui nequit. Hae ergo cuilibet Logarithmorum ope calculaturo, praesto sint, necesse est. Earum autem ratio haec est.

XVI. Definitio. In quauis Progressione geometrica *Basis* (die Grundzahl) eiusque Logarithmus pro lubitu determinari potest. Potest *Basis* poni $= a^1$ aut $= a^6$ &c. & eius Logarithmus $= 1$ aut $= 6$. Determinatis autem semel duorum numerorum, geometrice proportionalium, logarithmis, liberum amplius, & arbitrarium non est, reliquis, in eadem Progressione geometrica procedentibus, quoscunque adponere logarithmos: turbaretur enim, & interrumperetur Progressio arithmetica, quam logarithmi constituunt, & constituere debent. Sic e. g. posito $a = 2$, erit $a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 = 2^0 : 2^1 : 2^2 : 2^3 : 2^4 = 1 : 2 : 4 : 8 : 16$, & quia est log. $1 = 0$ & log. $2 = 1$ necessario log. 4 est $= 2$, & log. $8 = 3$, & log. $16 = 4$. alias enim non seruatur Progressio arithmetica $0 : 1 : 2 : 3 : 4$ &c. Posita ergo praefatae Progressionis

---

subtrahendum ex a, non potes id ope logarithmorum efficere, scribendo l. a — l. b. Vnde hoc Problema $a^x = cx + b$ non est ope logarithmorum solubile, neque hoc $x^2 + ax = d$. Ex dictis enim ibi non potes scribere l. a . x = l. c + l. x + l. b. neque hic l. x . 2 + l. a + l. x = l. d.

sionis $a^0 : a^1 : a^2 : a^3$ &c. *Basi* $a = 10$, erit log. $a^0 = l. 1 = 0$, & log. $a^1 = l. 10^1 = 1$, & $l. a^2 = l. 10^2 = l. 100 = 2$, & sic porro. Atque in hoc casu habetur systema logarithmicum *vulgare* (das gemeine logarithmische System) vulgo *Briggicum* dictum, ab HEINRICO BRIGG, Oxfordi Mathematum Professore celeberrimo, qui primus anno 1624, iuxta suppositum baseos $a = 10$ logarithmum $= 1$, logarithmos omnium numerorum naturalium ab 1 vsque ad 20000 & ab 90000 vsque ad 100000, adsignatis *Mantissae* (VI.) quatuordecim notis decimalibus, in sua Arithmetica logarithmica, determinauit. Qui adhucdum desiderabantur logarithmi pro numeris a 20000 vsque ad 90000, eos suppleuit ADRIANVS VLACQ, Goudae in Hollandia Mathematicus, in sua Arithmetica log. BRIGGII 1624. Logarithmi hi *vulgares* numerorum, inter 1 & 10 intermediorum, videlicet numerorum 2, 3, 4 &c. nihil aliud sunt, nisi Exponentes Potentiarum, ad quas eleuata *Basis* $a = 10$ progenerat numeros 2, 3, 4 &c., adeo, vt sit $0,3010300 = \log. 2$, & $0,4771213 = l. 3$, quia est, calculo instituto, $a^{0,3010300} = 10^{0,3010300} = 2$ & $a^{0,4771213} = 10^{0,4771213} = 3$ &c. Idem de logarithmis Numerorum inter 10 & 100 intermediorum censendum. Logarithmorum, hac ratione determinatorum, collectio *Canonis* logarithmici, seu Tabularum logarithmicarum nomen gerit, atque Tabulae hae sunt vel *maiores*, vel *minores*. Minores vocantur, quae ab 1 vsque ad 10000 porriguntur, & nonnisi 7 notas decimales Mantissae sistunt. Maiores vero vocantur illae, quae Logarithmos numerorum ab 1 vsque ad

ad 100000, & decem, aut plures adhuc Mantissae notas decimales referunt. Ad has ergo pertinent Tabulae logarithmicae Briggii, de quibus supra. Ad minores vero Tabulas pertinent & Tabulae Vlacqvii, & Wolfii, & illae, quas seculo superiore circa annum 1614 Edinburgi edidit perspicacissimus Io. Neperus, nobilis Scotus, sub Titulo: *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, eiusque Vsus in vtraque Trigonometria, & omni Logistica Mathematica explicatio.* Vir iste celeberrimus primus erat, qui systema quoddam logarithmicum conderet, & ex data superius (V. VI.) ratione vocabulum & nomen *Logarithmorum* adhiberet. Vnde iure merito Logarithmicae Arithmeticae inuentor salutatur, licet, monente cl. Ioanne Schvlz *), iam ante Neperum Michael Stiefel veram Logarithmorum Naturam, & Indolem nouerit, vti ex eius Arithmetica integra Norimb. 1544. libr. I. Cap. IV. VI. & lib. III. Cap. V. elucet. Adsumserat Neperus Logarithmos incipientes ab Vnitate, & ordine naturali progredientes, vt 1, 2, 3, 4, 5 &c. at longe commodius satiusque fore videbat postea, si numerorum geometrice proportionalium, atque ab 1 incipientium logarithmi ducerent initium a zero. Quo factum, vt supra nominatus cl. Brigg Tabulas Neperianas emendatum & perfectum iret. Atque sic enatae sunt supra recensitae Briggii Tabulae, queis omnes fere, post Briggium editae, Tabulae innituntur. Inter caeteras huc pertinent eae, quas anno 1783 Viennae edidit cl. Vega, summa cura confectae

*) Anfangsgründe der reinen Mathesis. S. 328.

fectae pro numeris ab 1 vsque ad 100000, & pluribus adhuc tum formulis, tum rebus aliis mathematicis instructae. Has quotusquisque sibi comparauerit (parari autem modico sumtu possunt) citra difficultatem prolixiores calculos mathematicos illarum ope iuxta Principia superius recitata poterit absoluere. Caeterum Tabulis hisce logarithmicis, & aliis maioribus fere singulis, iuncta est Instructio, ex qua Lector Vsum intelligat. Quare plura in hanc rem differere, superuacaneum reor. Id potius agendum, vt, qua ratione inuenti sint Logarithmi Numerorum, inter 1 & 10, 10 & 100 &c. intermediorum, paucis indicemus.

XVII. PROBLEMA. Inuenire Logarithmum Numeri 3.

Resol. Cum datus numerus = 3 sit intermedius inter numeros 1 & 10, certe etiam eiusdem Logarithmus inter Logarithmos numerorum 1 & 10, videlicet inter 0 & 1 comprehensus erit. *) Quae-

*) Logarithmos numerorum, inter 1 & 10 intermediorum debere esse maiores zero, ex eo patet, quia est l. 1 = 0. esse vero eos etiam debere minores vnitate, ex eo liquet, quia est l. 10 = 1. Vnde ex zero, & fractione decimali constare eos debere cogitur. Sic etiam logarithmi numerorum inter 10 & 100 intermediorum, necessario sunt > 1 & < 2, quia est l. 10 = 1 & l. 100 = 2. Quilibet ergo est = 1, + fractioni decimali, quae *Mantissa* vocatur. Vnde in systemate logarithmorum vulgari Briggico statim ex numero Notarum dati numeri, cognoscitur eiusdem logarithmi *characteristica* (VI.), & viciffim: quae res in caussa est, cur in Tabulis *characteristica* fere omittatur.

Quaeratur igitur inter a^0 & a^1 i. e. inter 1 & 10 medius geometrice proportionalis, instituendo hanc proportionem $\div\!\div \begin{matrix} a^0 : x : a^1 \\ 1 : x : 10 \end{matrix}$ erit $x^2 = a^1 =$

$= 10$, & $x = \sqrt{a^1} = a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1,0000000}{2}}$ (vnitati enim 1 quotcunque zeri decimales adiici possunt) $= a^{0,5000000} = 3,1622777$. Namque cum sit in Numeris $1 : x : 10$, erit $x^2 = 10$ & $x = \sqrt{10} = 3,1622777$ hinc $x = a^{0,5000000} = 3,1622777$. atque adeo est Exponens 0,5000000 = l. 3,1622777. Sed hic Numerus 3,1622777 est maior inueniendo numero 3 = 3,0000000, hinc & inuentus eius Logarithmus 0,5000000 > est, quam inueniendus Log. numeri 3. Quaeratur ergo iterum medius geometrice proportionalis inter numerum inuentum, iusto maiorem 3,1622777, & iusto minorem 1 = 1,0000000 id est, inter $a^0 = a^{0,0000000}$ & $a^{0,5000000}$, instituendo Proportionem:

$$\div\!\div \begin{matrix} a^{0,0000000} & : & x & : & a^{0,5000000} \\ 1,0000000 & : & x & : & 3,1622777 \end{matrix}$$

erit $x = \sqrt{a^{0,5000000}} = a^{\frac{0,5000000}{2}} = a^{0,2500000} =$ 1,7782794 cuius proinde logarithmus habetur = 0,2500000. Est autem hic numerus inuentus 1,7782794 iam minor, quam inueniendus 3, vnde & eius logarithmus minor est inueniendo logarithmo numeri 3 = 3,0000000. Hinc inter vltimum hunc numerum 1,7782794, inueniendo 3 minorem, & praecedentem vltimum maiorem = 3,1622777 quaeratur iterum medius geometrice proportionalis, & eius Logarithmus, sicque pergatur, quaerendo semper inter Numerum proxime maiorem, & minorem, numero 3, intermedium, eius-

eiusque logarithmum, donec tandem deueniatur ad hunc $a^{0,4771213} = 3,0000000 = 3$, vbi quaesitus numeri 3 Logarithmus $= 0,4771213$ praesto est. Eodem modo, sed labore, vt tentanti patebit, herculeo, Maiores nostri Logarithmos Numerorum 2, 7, 11, 13, 17 & ferme omnium primorum determinarunt. Quibus determinatis facile erat, Logarithmos numerorum, ex primis illis compositorum, reperire. Sic e. g. Determinato Logarithmo Baseos $a = 10$ & inuento Logarithmo numeri primi 2, habetur facillime Logarithmus numeri 5. Cum enim sit $5 = \frac{10}{2}$, erit etiam log. $5 = l. \frac{10}{2}$ (X. not.) est autem $l. \frac{10}{2} = l. 10 - l. 2$ (IX.) igitur $l. 5 = l. 10 - l. 2 = 1,0000000 - 0,3010300 = 0,6989700$. Sic similiter est $l. 9 = l. 3 + l. 3$ (VIII.) cum ergo sit $l. 3 = 0,4771213$, erit $l. 9 = 0,9542426$. Item log. $6 = l. 3 + l. 2$ & $l. 15 = l. 5 + l. 3$ & $l. 90 = l. 9 + l. 10$ &c.

XVIII. Coroll. 1. Ex dictis patet ratio, cur Logarithmis in Schemate superiore (VI.) positis septem zeri decimales adiiciantur, & hac ratione Logarithmi ipsi in fractiones decimales resoluantur. Namque cum inter datos duos Numeros 1 & 10, aliosque inueniendi sint per Extractionem Radicis quadratae non pauci medii proportionales; hae vero radices plerumque nonnisi per adproximationem ad veram haberi possint, septem zeri decimales adiiciuntur, vt Error & defectus subrepens non excedat vnam partem millionesimam Vnitatis, i. e. vt sit $= 0$.

Coroll. 2. Ope logarithmorum ergo mathematice exacte calculari non possumus, adeo videlicet,

licet, vt in rigore nihil prorſus deficiat. Namque nec ipſos Logarithmos, mathematice exactos, habemus. Interim cum eo vſque ſint determinati, vt defectus nequidem partem millioneſimam vnitatis conſtituat (& in maioribus Tabulis ne quidem partem billioneſimam) tuto illos adhibemus, defectumque, in Rigore ſemper reſiduum, ceu nihilum ſpernimus, eo maiores Tabulas in ſubſidium vocantes, quo exactiorem calculum deſideramus.

CAPVT II.

DE LOGARITHMORVM IN MATERIA DE INTERVSVRIO VSV.

Superest, vt, quam foecundus, & late patens ſit Logarithmorum in calculis mathematicis vſus, nonnullis in rem vſurariam Exemplis (de inſigni eorum vſu in calculis trigonometricis ſuo loco dicetur) oſtendamus.

XIX. HYPOTHESIS. Vocetur vſura annua pro 100 fl. $= x$, & quaeuis ſumma expoſita $= a$, erit $100 : x = a : a . \frac{x}{100}$ i. e. 100 fl. dant vſuram annuam $= x$, quamnam vſuram annuam dat ſumma expoſita $= a$? prouenit quartus terminus proportionalis $= \frac{ax}{100} = a . \frac{x}{100}$. Sit iam $\frac{x}{100} = m$, erit vſura annua pro $a = am$. Porro fiat numerus annorum, quibus pro a ſoluitur vſura, $= n$. & tota ſumma, in fine annorum, vna cum vſuris

fol-

soluenda, sit $=S$, tandem si elapso quouis anno summae S addatur noua summa, haec sit $=b$. His positis, varii casus existere possunt. Praecipui sunt sequentes:

Casvs I. Finito quouis anno vsura adiiciatur summae, ab initio eiusdem anni expositae, ita, vt vsurae vsurarum proueniant — quaeritur summa S post annos n soluenda.

Resolutio. Est in hoc casu $S = a(m+1)^n$. Nam vsura pro summa a ab initio anni primi exposita sub finem anni primi est $= am$ (ex hypothesi praemissa), ergo post annum I est $S = a + am = a(m+1)$. porro; vt inueniatur S pro anno secundo, quaeratur vsura post annum secundum debita pro summa $a+am$, ab initio anni secundi exposita. Fiat ergo $100 : x = a+am : (a+am)\frac{x}{100} = (a+am)m = am+am^2$. Vnde post annum II erit $S = a + am + am + am^2 = a + 2am + am^2 = a(m+1)^2$. & sic post annum III reperitur $S = a(m+1)^3$. post annum IV est $S = (m+1)^4$. Vnde patet lex progressionis. Erit ergo post annos n $S = a(m+1)^n$. ex qua formula fluit $a = \frac{S}{(m+1)^n}$. & $m = \sqrt[n]{\frac{S}{a}}) - 1$. siue adhibendo logarithmos

est

$$\text{est}\begin{cases} \text{I) Log. } S = \log. a + l.(m+1).n. \\ \text{II) L. } a = l.S - l.(m+1).n \\ \text{III) L. } (m+1) = \dfrac{l.S - l.a}{n} \\ \text{IV) } n = \dfrac{l.S - l.a}{l.(m+1)} \end{cases}$$

Problema I. Exponitur Summa = 1000 fl. Vſurae annuae ſint 6 pro Cento, & hae ſemper adiiciantur ad *a*. quaeritur *S* poſt annos 3.

Reſol. Ex formula I eſt l. S = l. a + l. (m + 1) n. Sed eſt l. a = l. 1000 = 3,0000000, & l. (m + 1) n = l. (53 − l. 50). 3 = 0,0759177. Vnde l. S = 3,0759177; ſed numerus huic log. in Tabulis reſpondens eſt = 1191,016 ergo S = 1191,016.

Probl. II. Exponatur Summa = a, quae ſingulis annis vſuris quincuncibus (vulgo zu 5 pro cent) aucta, poſt annos 30 dat Summam = 46325 fl., quaritur, quanta fuerit ipſa Summa expoſita = a?

Reſol. habetur ex form. II. vbi eſt l. a = l. S − l. (m + 1) n, & ſubſtituendo: l. a = 4,6658154 − 0,6356790 = 4,0301364. Numerus autem huic log. reſpondens eſt = 10718,56. igitur a = 10718,56 fl.

Probl. III. Exponatur Summa a = 1000 fl., vſura annua pro 100 ſit = 4. Haec ſi ſingulis annis adiiciatur ad *a*, poſt quot annos tota Summa ſoluenda erit = 10000 fl?

Reſol.

Resolutio. Formula IV est $n = \frac{l.S - l.a}{(l.m+1)} = \frac{4{,}0000000 - 3{,}0000000}{0{,}0170333} = \frac{1{,}0000000}{0{,}0170333} = 59$ fere.

PROBL. IV. In quadam Prouincia degunt 2000000 homines. Summa haec quot annis augeatur parte 50ma, quantus erit hominum numerus post annos 100?

Resol. Esto $a = 2000000$, $n = 100$, & $m = \frac{2}{100} = \frac{1}{50}$ (pars etenim 50ma potest spectari ceu 2 pro cento) erit ex Form. I. $l.s = l.a + l.(m+1)n$. Hinc in Numeris: $l.s = 6{,}3010300 + 0{,}8600200 = 7{,}1610500$. Cui log. respondet proxime Numerus $= 14522790$. Igitur post annos 100 erit Hominum Numerus $= 14522790$.

PROBL. V. Exponitur Summa $= a = 1000$ fl., haec si quot annis vsura $= x$ pro 100, augeatur, intra annos ferme 59 dat Summam $= 10000$ fl., quaeritur vsura annua pro $100 = x$.

Resolutio habetur ex Form. III. Est $l.(m+1) = \frac{l.s - l.a}{n} = \frac{4{,}0000000 - 3{,}0000000}{59} = \frac{1{,}0000000}{59} = 0{,}0169492$. & Numerus huic logarithmo respondens est $= 1{,}039798 = m + 1$. Vnde $m = 0{,}039798$. Est vero $m = \frac{x}{100}$ ergo $x = 100.m = 3{,}979800 = 4$ ferme. Hinc vsura annua pro 100 ferme fuit 4 fl.

CASVS

CASVS II. Summae *S* in priori casu adiiciatur in fine cuiusuis anni noua Summa *b*, cuius incrementa annua itidem adiiciantur semper Summae expositae: quaeritur, quanta sit integra Summa *S* post annos *n*?

Ref. Erit
post primum annum $S = a(m+1) + b$
post annum secundum $S = a(m+1)^2 + b(m+1) + b$.
post ann. III. $S = a(m+1)^3 + b(m+1)^2 + b(m+1)^1 + b = a(m+1)^3 + b[(m+1)^2 + (m+1) + 1]$.

Igitur post annos n fit $S = a(m+1)^n + b[(m+1)^{n-1} + (m+1)^{n-2} \ldots + 1]$. Vnde liquet incrementa Summae b seruare progressionem geometricam descendentem, cuius terminus maximus sit $= (m+1)^{n-1}$ & minimus $= 1$ & exponens $= (m+1)^{-1} = \frac{1}{(m+1)}$. Vt iam inueniatur Summa huius progressionis, adhibeatur formula generalis pro summa progressionis geometr. videlicet $S = \frac{qz-a}{q-1}$ substituendo Valores, obtinetur $S = \frac{(m+1)^{-1} - (m+1)^{n-1}}{(m+1)^{-1} - 1} = \frac{1}{m+1} - (m+1)^{n-1} : \frac{1}{m+1} - 1 = \frac{(m+1)^n - 1}{m}$. Ergo Summa b generat post annos n Summam $= \frac{b[(m+1)^n - 1]}{m}$. quae si adiiciatur ad eam, quam Summa *a* post annos *n* producit, videlicet ad $a(m+1)^n$, erit tota Summa

ma S post annos $n = a(m+1)^n + b\frac{(m+1)^n - 1}{m} =$

$\frac{am(m+1)^n + b[(m+1)^n - 1]}{m} =$

$\frac{(am+b)(m+1)^n - b}{m}$. Vnde fluunt formulae generales:

$$\text{I)}\ S = \frac{(am+b)(m+1)^n - b}{m}.$$

$$\text{II)}\ a = \frac{Sm+b}{m(m+1)^n} - \frac{b}{m}.$$

$$\text{III)}\ b = \frac{Sm-(am)(m+1)^n}{(m+1)^n - 1}.$$

$$\text{IV)}\ n = \frac{l.(Sm+b) - l.(am+b)}{l.(m+1)}.$$

Problema. Debetur Summa $a = 20000$ fl. Vsura annua pro 100 sit $= 5$, petit vero debitor a creditore adhuc in fine cuiuslibet anni 20 fl. $= b$, & integram Summam S post annos $6 = n$ restituere cogitat; quaeritur S.

Resol. Est $S = \frac{(am+b)(m+1)^n - b}{m}$. Vnde $Sm+b = (am+b)(m+1)^n$ siue $\log.(Sm+b) = l.(am+b) + l.(m+1)n$. Est vero

$a = 20000$
$m = \frac{x}{100} = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$
$b = 20$

vnde $l.(am+b) = l.1020 = 3,0086002$

Porro

Porro est $m + 1 = \frac{21}{20}$. ergo $l.(m+1) = l.\frac{21}{20} = l.21 - l.20 = 0,0211893$. hinc $l.(m+1)n = 0,0211893 \times 6 = 0,1271358$. Vnde est $l.(Sm+b) = 3,1357360$. sed numerus huic logarithmo respondens est 1366,898. Ergo est $Sm + b = 1366,898$. & $Sm = 1346,898$ & $S = 1346,898 : \frac{1}{20} = 26937,960$ fl.

Casus III. Quodsi in fine cuiusuis anni detrahatur Summa $= b$, quae sit minor, vsura annua, per se patet, in priore casu loco $+ b$ fieri $- b$. Vnde habentur hae formulae generales:

$$\text{I)}\quad S = \frac{(am-b)(m+1)^n + b}{m}$$

$$\text{II)}\quad a = \frac{Sm-b}{m(m+1)^n} + \frac{b}{m}$$

$$\text{III)}\quad b = \frac{am(m+1)^n - Sm}{(m+1)^n - 1}\ *$$

$$\text{IV)}\quad n = \frac{l.(Sm-b) - l.(am-b)}{l.(m+1)}\ **$$

* Scholium I. Fluit haec formula ex II): $a = \frac{Sm-b}{m(m+1)^n} + \frac{b}{m}$. Nam tollendo fractionem est $am(m+1)^n = Sm - b + b(m+1)^n$. Vnde $b = \frac{am(m+1)^n - Sm}{(m+1)^n - 1}$

D ** Schol.

** SCHOL. II. Fluit haec formula ex I) $S = \frac{(am-b)(m+1)^n + b}{m}$ tollendo enim fractionem est $Sm = (am-b)(m+1)^n + b$. & per metathesin est $Sm - b = (am-b)(m+1)^n$. vnde log. $(Sm-b) = l.(am-b) + l.(m+1)n$. & hinc $n = \frac{l.(Sm-b) - l.(am-b)}{l.(m+1)}$.

PROBLEMA. Credidit Titius Caio Summam $a = 100000$ fl. sub vsuris quincuncibus, ergo vsura vnius anni est 5000 fl. Petit autem creditor annuatim duntaxat ad vitam sustentandam 2000 fl. $= b$, quaeritur, quanta erit Summa *S*, ei soluenda, post annos 20?

Resol. ex form. I. $S = \frac{(am-b)(m+1)^n + b}{m}$.

Vnde $l.(Sm-b) = l.(am-b.) + l.(m+1)n$. Sed est $l.(am-b) = l. 3000 = 3{,}4771213$ & $l.(m+1)n = l.(\frac{21}{20}) \times 20 = 0{,}4237860$. ergo est $l.(Sm-b) = 3{,}4771213 + 0{,}4237860 = 3{,}9009073$. Numerus vero huic logarith. respondens est $= 7959{,}894 = Sm - b$. vnde $Sm = 9959{,}894$ & $S = 9959{,}894 : \frac{1}{20} = 199197{,}88 = 199197{,}9$.

CASVS IV. Si detrahatur semper *b* maior, vsura, per se patet, demum fore $S = 0$. Atque in hoc casu, vbi post annos *n* fit $S = 0$ & vbi ponitur $b > am$, valent hae formulae, ex formulis Casus III. suopte fluentes.

I)

$$\text{I)}\quad a = \frac{b(m+1)^n - b}{m(m+1)^n}$$

$$\text{II)}\quad b = \frac{am(m+1)^n}{(m+1)^n - 1}$$

$$\text{III)}\quad n = \frac{l.\,b. - l.(b - am)}{l.(m+1)}.$$

PROBL. Monasterium quoddam expositam habet Summam pecuniae $a = 100000$ fl. sub vsuris quincuncibus. Igitur vsura annua est 5000 fl.: petit autem annuatim 9000 fl. $= b > 5000$. quaeritur, quando euanescat Summa exposita a?

Resolutio. est $n = \frac{l.\,b - l.(b - am)}{l.(m+1)} = \frac{l.\,9000 - l.(4000)}{l.\,21 - l.\,20} = \frac{0{,}3521825}{0{,}0211893} = 16{,}62\ldots$ anni.

CASVS V. Debetur Summa a, nonnisi post annos n soluenda, intra quod tempus nulla debetur vsura. Quaeritur Summa S, quae hodie pro a soluatur?

Resol. Si hodie soluatur a, soluens pro sequenti anno iure petit vsuram $= am$. Igitur soluet $a - am$. At cum haec vsura sit hodie reddita, (quae tamen soluenti demum in fine anni primi debebatur) debet soluens restituere vsuram huius vsurae. Igitur solutio est $= a - am + am^2$. (Nam vsura vsurae am est am^2, vi analogiae

 100 : x =

$100 : x = am : am \frac{x}{100} = am^2$.) Cum vero ſic iterum reddenda ſit huius vltimae vſurae vſura, & ſic in infinitum; fiet pro primo anno $S = a - am + am^2 - am^3 + am^4 \ldots \frac{1}{\infty}$. multiplicetur iam vtrumque aequationis membrum per m, erit $Sm = am - am^2 + am^3 - am^4 \ldots - \frac{1}{\infty}$ & ſi aequalia aequalibus addantur, erit $S + Sm = a$.

Inde pro primo anno $S = a \frac{1}{m+1}$

Igitur pro ſecundo anno $S = a \frac{1}{m+1} - am . \frac{1}{m+1} + am^2 . \frac{1}{m+1} \ldots \frac{1}{\infty}$ &, vt prius, multiplicatione per m facta, erit pro duobus annis $S = a . \frac{1}{(m+1)^2}$. Et ſic porro. Igitur pro annis n erunt formulae:

I) $S = a \frac{1}{(m+1)^n}$

II) $m = \sqrt[n]{\frac{a}{s}}) - 1$

III) $a = S(m+1)^n$ &

IV) $n = \frac{l.a - l.s}{l.(m+1)}$ *vel* adhibendo logarithmos eſt

$L. l, S. = l. a - l. (m+1) n$

II.

II. $l.(m+1) = \frac{l.a. - l.s}{n}$

III. $l.a = l.s + l.(m+1)\,n$

IV. $n = \frac{l.a - l.s}{l.(m+1)}$

Casvs VI. Debetur cenſus annuus a per annos n. quaeſitur Summa S, quae hodie ſoluta redimat omnem cenſum.

Reſ. Eſt $\begin{cases} \text{pro anno primo } S = a - am + am^2 \ldots \\ \text{Vnde } S = a.\frac{1}{m+1} \text{ (Casvs V)} \\ \text{pro anno ſecundo } S = a.\frac{1}{m+1} \\ - am\frac{1}{m+1} + am^2\frac{1}{m+1}\ldots = a.\frac{1}{(m+1)^2} \\ \text{pro anno tertio } S = a.\frac{1}{(m+1)^2} \\ - am.\frac{1}{(m+1)^2} + am^2.\frac{1}{(m+1)^2} \ldots \\ = a.\frac{1}{(m+1)^3} \end{cases}$

Igitur pro anno $n^{\text{eſimo}}$ erit $S = a.\frac{1}{(m+1)^n}$, &

pro omnibus annis eſt $S = a\frac{1}{m+1} + a.\frac{1}{(m+1)^2} + a.\frac{1}{(m+1)^3} \ldots\ldots + a.\frac{1}{(m+1)^n} =$

$a\left[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^3} \ldots + \frac{1}{(m+1)^n}\right]$

Euidens iam est, in altero huius aequationis membro haberi progressionem geometricam, cuius terminus primus est $= a \frac{1}{m+1}$, ultimus $= a . \frac{1}{(m+1)^n}$ & exponens $= \frac{1}{m+1}$. Vnde Summa eius reperitur ex formula generali $S = \frac{qz-a}{q-1}$. Substituendo enim est $S = \frac{1}{m+1} \times a \frac{1}{(m+1)^n} - a \frac{1}{m+1} : - \frac{m}{m+1} = \frac{a}{m}\left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right)$. Vnde fluunt formulae generales:

$$\text{I)}\quad S = \frac{a}{m} . \left(1 - \frac{1}{(m+1)^n}\right).$$

$$\text{II)}\quad a = \frac{S m . (m+1)^n}{(m+1)^n - 1}$$

$$\text{III)}\quad n = \frac{l. a - l. (a - S m)}{l. (m+1)}.$$

DISSER-

DISSERTATIO VI.

DE THEOREMATE BINOMIALI.

1) PROBLEMA. *Radicem binomiam a+b eleuare ad Potentiam sextam, & septimam.*

Resol. Ex Ratione superius (Differt. III. 5.) iam data Potentia quinta Binomii a+b ibidem constructa $= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ multiplicetur per Radicem a+b, & obtinebitur Potentia sexta $= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$. Pariter Potentia haec sexta ducta in Radicem a+b dat septimam $= a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

2) COROLL. Potentiae ergo septem primae Binomii a+b sunt sequentes:

I) $a + b$

II) $a^2 + 2ab + b^2$

III) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

IV) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

V) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

VI) $a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$.

VII) $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$.

3) Co-

3) Coroll. Ex quo Schemate liquet, in quolibet cuiuslibet Potentiae Termino praeter *Exponentes* partium Radicis, & *Coefficientem* Facti partium Radicis $a+b$ nihil occurrere.

4) Coroll. Porro liquet, Exponentium legem hanc esse, vt a) Exponens Termini primi *a* sit aequalis Exponenti ipsius Potentiae, b) hic idem Exponens cotinuo decrescat Vnitate, donec in vltimo Termino euanescat; c) Exponens vero Notae secundae radicalis *b* sit in primo cuiusque Potentiae Termino $= 0$, & in secundo $= 1$, & dein continuo Vnitate crescat, donec in vltimo Termino Potentiae fiat $=$ Exponenti ipsius Potentiae.

Atque legem hanc Exponentium in rigore veram esse, ita demonstratur.

Posito, legem praefatam Exponentium veram esse in Potentia aliqua *mesima* Binomii $a+b$, ea quoque vera est in Potentia proxime superiore $(m+1)^{esima}$. Namque posito, eam veram esse in Potentia *mesima*, & positis loco *Coefficientium* (quorum quippe legem postea examinabimus) literis maioribus A, B, C . . , erit $(a+b)^m = a^m + A a^{m-1} b + B a^{m-2} b^2 . . . + V a b^{m-1} + b^m$ Vt iam oriatur Potentia $(m+1)^{esima}$, multiplicetur Potentia praecedens *mesima* per Radicem $a+b$, & erit $(a+b)^{m+1} = (a+b)^m . (a+b) =$ $[a^m + A a^{m-1} b + B a^{m-2} b^2 ... + V a b^{m-1} + b^m](a+b)$

$$= a^{m+1} + A a^m b + B a^{m-1} b^2 ... + V a^2 b^{m-1} + a b^m$$

$$+ 1 a^m b + A a^{m-1} b^2 . . . . + V a b^m + b^{m+1} =$$

$$a^{m+1} + (1+A) a^m b + (A+B) a^{m-1} b^2 . + (V+1) a b^m + b^{m+1}$$

vbi

vbi euidens est, etiam in Potentia $(m+1)^{\text{esima}}$ Exponentium legem illam ipsam esse, quam in Potentia proxime inferiore m^{esima} sumseramus. Ergo si praefata Exponentium lex vera est in Potentia quacunque m^{esima}, ea quoque vera est in Potentia proxime superiore $(m+1)^{\text{esima}}$. Sed vera illa est in Potentiis septem primis, vti ex Schemate superiore (2) liquet, ergo vera quoque est in Potentia *octaua*, ergo & in *nona* & sic in infinitum: i. e. vera illa est in rigore.

5) Coroll. I. Quodsi cuiuslibet Potentiae Terminus ille, qui continet Potentiam primae Notae radicalis *a*, dicatur *primus*, erit is, in quo Exponens Termini *b* est 1, 2, 3 . . . *m*, *secundus*, *tertius*, *quartus* . . $(m+1)^{\text{esimus}}$ i. e. Numerus cuiuslibet Termini post *primum* tunc Vnitate maior est Exponente, quem in eodem Termino habet altera Nota radicalis *b*. Quodsi vero quaelibet Potentia diuisa intelligatur in duas partes, quarum prima contineat tantum Potentiam primae Notae radicalis *a*, & altera omnes reliquos Terminos, quos secunda Nota radicalis *b* in data Potentia praebet, tunc erit inter hos Terminos, qui simul sumti alteram Potentiae partem constituunt, & quos *consequentes* dicere fas esto, ille *primus*, *secundus* . . . n^{esimus}, in quo Nota radicalis *b* habet Exponentem 1, 2, ... *n*.

Coroll. II. Quaelibet Potentia habet Terminos *vno* plures, quam sit Exponens maximus Potentiae. Namque Numerus Terminorum, quos pars *altera* (praeced.) Potentiae datae continet, debet

debet esse = Exponenti ipsius Potentiae, quia hi Termini continent omnes Potentias Notae secundae radicalis *b* inde a *prima*, vsque ad Potentiam illam inclusiue, quam indicat Exponens ipsius Potentiae (praecd.), & ad hos Terminos accedit adhuc Terminus ille, qui solam Notae primae radicalis *a* Potentiam continet. — Ergo si de Potentia m^{esima} sermo est, semper erit Numerus Terminorum omnium = m+1, adeoque quaelibet Potentia habet Terminos vno plures, quam sit Exponens maximus Potentiae, adeoque porro quaelibet Potentia proxime superior habet Terminos *vno* plures, quam proxime inferior.

Coroll. III. Exponentes de *a* & *b* in quolibet Termino *consequente* simul sumti sunt aequales Exponenti ipsius Potentiae.

6) Coroll. Quod iam ad *Coefficientes* attinet, est inprimis Coefficiens cuiusque Termini $(n+1)^{esimi}$ in Potentia proxime superiore $(m+1)^{esima}$ aequalis Summae Coefficientium eiusdem Termini $(n+1)^{esimi}$, & Termini hunc praecedentis n^{esimi} in Potentia proxime inferiore m^{esima}. Namque ex formula praecedente (4) pro $(a+b)^{m+1}$ euidens est, esse α) Coefficientem Termini secundi = 1+A i. e. = Coefficienti Termini secundi in Potentia proxime inferiore $(a+b)^m$, qui ex hypothesi erat = A addito Coefficiente Termini primi a^m in eadem Potentia proxime inferiore m^{esima}, qui est = 1. Pariter β) Coefficientem Termini tertii in Potentia $(a+b)^{m+1}$ esse = A+B i. e. = Coefficienti Termini *tertii* Potentiae proxime inferioris $(a+b)^m$, qui ex hypothesi est = B, addito Coefficiente Termini

se-

secundi = A, & sic generaliter, si in Potentia $(a+b)^m$ dicatur Coefficiens termini $(n+1)^{esimi}$ = N, & termini proxime praecedentis n^{esimi} = *M*, esse in Potentia proxime superiore $(a+b)^{m+1}$ coefficientis Termini $(n+1)^{esimi}$ = *N*+*M*.

7) Coroll. Quia Potentia quaelibet altior $(a+b)^{m+1}$ habet Terminos vno plures, quam proxime inferior $(a+b)^m$, (5 Coroll. 2), consequens est, vt Termino vltimo Potentiae altioris $(m+1)^{esimo}$ non respondeat in Potentia proxime inferiore $(a+b)^m$ terminus $(m+2)^{esimus}$, adeoque eius Coefficiens est = soli Coefficienti termini vltimi Potentiae proxime inferioris $(a+b)^m$. Quodsi ergo Coefficiens termini vltimi alicuius Potentiae est = 1, erit quoque Coefficiens termini vltimi Potentiae proxime superioris = 1. Iam vero reapse Potentiarum septem primarum termini vltimi Coefficiens est = 1, vti liquet ex Schemate superiore (2), ergo & *octauae*, ergo & *nonae* &c. i. e. in omni Potentia termini vltimi Coefficiens est = 1. Similiter omnis Potentiae terminum primum habere Coefficientem = 1, demonstratur.

8) Hypothesis. Vt iam intelligatur, qualis esse debeat Coefficiens Terminorum reliquorum, qui vna cum vltimo partem alteram totius Potentiae constituunt, (5 Coroll. 1.), Coefficiens Termini inter illos *primi* pariter vocetur *primus* = A, & *secundi secundus* = B, *tertii tertius* = C . . . & *nesimi nesimus* = N (= $(n+1)^{esimo}$ iuxta 5 Coroll. I.). Quo posito

9) Co-

9) Coroll. Quodsi Potentiae $(a+b)^m$ Coefficiens *primus* = A est = *m* i. e. = Exponenti ipsius Potentiae, erit quoque Potentiae proxime superioris $(a+b)^{m+1}$ Coefficiens *primus* = m + 1 i. e. = Exponenti ipsius Potentiae. Nam ex Formula superiore (4) liquet, Coefficientem *primum* Potentiae $(m+1)^{esimae}$ esse = A + 1 = m + 1, dum Coefficiens *primus* Potentiae proxime inferioris *mesimae* ponebatur = A = m. Sed iam reapse Potentiarum septem primarum Coefficiens *primus est* = Exponenti Potentiae ipsius i. e. si sit $(a+b)^m = (a+b)^7$, est A = m = 7, vti liquet ex Schemate superiore (2). hinc quoque in $(a+b)^{m+1} = (a+b)^8$ debet esse A = m + 1 = 8, hinc etiam in $(a+b)^{m+2} = (a+b)^9$ est A = m + 2 = 7 + 2 = 9 & sic in infinitum: ergo cuiuslibet Potentiae Coefficiens primus *A* est = Exponenti ipsius Potentiae.

10) Coroll. Coefficiens *secundus B* Potentiae *secundae* est = Coefficienti *primo* Potentiae *primae* i. e. = 1 (7). Et Coefficiens *secundus B* Potentiae *tertiae* est = Summae *secundi* & *primi* Potentiae *secundae*, adeoque = 1 + 2 (6. 9). Et Coefficiens *secundus B* Potentiae *quartae* est = Summae *secundi* & *primi* Potentiae *tertiae*, adeoque = 1 + 2 + 3 (ibid.). Pariter Coefficiens *secundus* quintae Potentiae est = Summae *secundi* & *primi* quartae = 1 + 2 + 3 + 4 . . . . generaliter quodsi cuiusdemumcunque Potentiae *mesimae* Coefficiens secundus *B* est = Summae Numerorum naturalium ab 1 vsque ad illum inclusiue, qui est Vnitate minor, Exponente ipsius Potentiae, erit Coefficiens

secun-

secundus B Potentiae proxime superioris $(m+1)^{esimae}$ = praefatae Summae numerorum naturalium, addito Coefficiente *primo A* Potentiae proximae inferioris *mesimae* (6), qui *primus A* semper est = Exponenti ipsius Potentiae proxime inferioris (9). Et quia hic Exponens *m* Potentiae proxime *inferioris* est Vnitate minor Exponente $m+1$ Potentiae proxime *superioris*, erit iterum Coefficiens *secundus B* Potentiae proxime superioris $(m+)^{esimae}$ = Summae Numerorum naturalium 1, 2, 3 &c. vsque ad illum inclusiue, qui est Vnitate minor Exponente Potentiae proxime superioris. Atqui reuera Coefficiens *secundus* Potentiae *secundae* est = Summae Numerorum naturalium vsque ad illum inclusiue, qui est Vnitate minor Exponente ipsius Potentiae i. e. = 1; ergo praefata lex valet quoque de Coefficiente *secundo* Potentiae *tertiae*, hinc & de Coefficiente *secundo* Potentiae *quartae*, & sic in infinitum. Cuiuslibet ergo Potentiae *mesimae* Coefficiens secundus *B* est $= 1+2+3+4 \ldots + (m-1)$. Iam vero hi Termini 1, 2, 3 ... (m—1) constituunt Progressionem arithmeticam, in qua Terminus primus $a = 1$, differentia $d = 1$, & vltimus Terminus $z = m - 1$, igitur est ex Formula superiore (Differt. IV. §. 14. Formula VI.) Summa

$$S = \frac{z^2 \pm dz \pm ad - a^2}{\pm 2d} = \frac{(m-1)^2 \pm (m-1) \pm 1 - 1}{\pm 2}$$

& quia Progressio $1:2:3:4 \ldots + m - 1$ est ascendens (vbi in praefata Formula signa superiora valent) est, calculo instituto,

$$S = \frac{m^2 - 2m + 1 + m - 1 + 1 - 1}{2} = \frac{m^2 - m}{2} = \frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}$$

Igitur

Igitur cuiuslibet Potentiae Coefficiens secundus B est $= \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2}$.

11) Coroll. Comparatione iam inter *Coefficientem* primum A & secundum B (9. 10) instituta, praeuie colligere pronum est, Coefficientem *tertium* C cuiuslibet Potentiae fore $= \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ atque haec coniectura maxime confirmatur ex eo, quod, si Exponens Potentiae cuiusque m ponatur $= 2, 3, 4, 5$ &c. Coefficiens *tertius* fiat $= 0, 1, 4, 10$, qualis reuera juxta Tabulam superiorem (2) esse debet. Sed praeuia haec coniectura in *apodicticam* certitudinem abit, si ostendi queat, Coefficientem *tertium* Potentiae proxime superioris $(m+1)$esimae necessario esse debere $= \frac{(m+1) \cdot m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, quodsi Coefficiens *tertius* Potentiae inferioris *mesimae* sumitur esse $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; Namque tunc ita argumentari licet: in Potentia *tertia*, *quarta*, *quinta* &c. est Coefficiens *tertius* $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (vti liquet ex Tabula citata), ergo & Potentiae $(m+1)$esimae i. e. *sextae* Coefficiens *tertius* est $= \frac{(m+1) \cdot m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, ergo & 7*mae* Coefficiens 3*tius* $= \frac{(m+2) \cdot (m+1) \cdot m}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ &c. i. e. generatim, si Potentiae cuiusque Exponens

nens dicatur $= m$. est eius Coefficiens *tertius* $= \frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$ i. e. $=$ facto ex tribus Numeris naturalibus m, m—1, m—2, quos inter Exponens Potentiae *m* est maximus, diuiso per factum ex tribus numeris naturalibus 1, 2, 3. Ostendendum ergo duntaxat est, Coefficientem *tertium* Potentiae proxime superioris $(m+1)^{esimae}$ esse necessario $= \frac{(m+1) \,.\, m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, si Coefficiens 3*tius* Potentiae proxime inferioris m*esimae* sumatur $= \frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$. Atque hoc ita ostenditur.

Sumto, Coefficientem 3*tium* Potentiae m*esimae* esse $= \frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, erit Coefficiens *tertius* Potentiae proxime superioris $(m+1)^{esimae}$ $=$ Summae Coefficientis *tertii*, & *secundi* Potentiae proxime inferioris m*esimae* (6), adeoque $=$

$$\frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \frac{m \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2} =$$

$$\frac{m^3 - 3m^2 + 2m + 3m^2 - 3m}{6} = \frac{m^3 - m}{6} =$$

$$\frac{m.(m^2-1)}{6} = \frac{m \,.\, (m+1) \,.\, (m-1)}{6}.$$ (Nam m^2-1 $= (m+1) \,.\, (m-1)$) $= \frac{m \,.\, (m+1) \,.\, (m-1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$.

Ergo liquet, Coefficientem *tertium* Potentiae proxime

xime altioris $(m+1)^{esimae}$ eodem modo per Ex nentem huius Potentiae altioris exprimi, quo efficiens *tertius* Potentiae proxime inferioris m *mae* per Exponentem huius ipsius Potentiae in rioris exprimebatur, adeoque reuera cuiuslibet I tentiae *mesimae* Coefficiens *tertius* est $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

12) Coroll. Eodem modo ostenditur, c iuslibet Potentiae Coefficientem *quartum D* esse $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Nam posit alicuius Potentiae *mesimae* Coefficientem *quartu* esse reuera $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ erit quoque Coefficiens *quartus* Potentiae proxim superioris $= \frac{(m+1) \cdot m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Est enim rursus Coefficiens *quartus* Potentia $(m+1)^{esimae}$ = Summae Coefficientis *quarti* & *terti* Potentiae proxime inferioris *mesimae* (6) adeoqu est is $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{m^4 - 6m^3 + 11m^2 - 6m + 4m^3 - 12m^2 + 8m}{24} = \frac{m^4 - 2m^3 - m^2 + 2m}{24} = \frac{(m+1) \cdot m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

quae

quae quidem Expreſſio ſuopte etiam obtinetur, ſi in aſſumto Coefficiente *quarto* Potentiae *meſimae*, qui erat $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ pro m ponatur m+1.

Quodſi ergo alicuius Potentiae *meſimae* Coefficiens *4tus* reuera eſt $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ etiam Coeffi iens *quartus* Potentiae proxime ſuperioris $(m+1)^{\text{eſimae}}$ iuxta eandem legem exprimitur per $= \frac{(m+1) \cdot m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Sed reuera Coefficiens *quartus* Potentiae *quintae* eſt $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, vti ex Tabula ſuperiore (2) patet; ergo etiam, ſi ponitur m=6, 7, 8 &c., erit Coefficiens *quartus* Potentiae *ſextae* $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, adeoque & *ſeptimae* &c. & hinc *omnis* Potentiae Coefficiens *quartus* eſt $= \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ i. e. = *quoto, qui oritur, ſi factum ex quatuor Numeris naturalibus m, m—1, m—2, m—3, quorum maximus* m *eſt ipſius Potentiae Exponens, diuiditur per factum ex quatuor Numeris naturalibus* 1, 2, 3, 4.

13) Coroll. Ex comparatione quatuor primorum Coefficientium *A*, *B*, *C*, *D*, hactenus determinatorum euidens eſt, id habere illos inter

 ſe

ſe commune, quod quilibet ſit *quotus* ortus ex diuiſione, cuius 1) *Diuidendus* ſit *factum* ex tot ſibi ſuccedentibus Numeris naturalibus ortum, quot Vnitates habet ille ipſe Numerus, qui indicat, de *quoto* Coefficiente ſermo ſit; & quorum Numerorum naturalium *maximus* ſit *Exponens* ipſe Potentiae, & *minimus* proinde ſit = *Exponenti* Potentiae, dempto Numero illo, qui indicat, de *quoto* Coefficiente ſermo ſit, *Vnitate multato*. 2) *Diuiſor* ſit *factum* ex totidem numeris naturalibus, quorum primus ſit = 1, & vltimus aequetur illi ipſi Numero, qui indicat, de *quoto* Coefficiente ſermo ſit.

14) Coroll. Quae lex literis expreſſa dat Coefficientem $(n+1)^{\text{eſimum}}$ (8) Potentiae $(a+b)^m$, videlicet ſi hic dicatur = Q, eſt

$$Q = \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1).(m-n)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots n\;.\;(n+1)}$$

Et ſi Coefficiens hunc proxime praecedens $n^{\text{eſimus}}$ dicatur = P, eſt ſimiliter

$$P = \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+2).(m-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\ldots(n-1)\;.\;n}$$

Vnde eſt

15) Coroll. $Q = P.\frac{(m-n)}{n+1}$. Atque adeo eſt (6)

16) Coefficiens $(n+1)^{\text{eſimus}}$ Potentiae $(m+1)^{\text{eſimae}}$

$$= Q + P = P + P.\frac{(m-n)}{n+1} = \frac{Pn + P + [P(m-n)]}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1+m-n)P}{n+1} = \frac{m+1}{n+1}.P$$ hinc substituendo pro P eius valorem (14), erit $P+Q = \frac{m+1}{n+1} P$

$$= \frac{(m+1).m.(m-1)\ldots(m-n+2).(m-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;n\;.\;(n+1)}$$

Atque eadem haec Expressio Coefficientis $(n+1)^{\text{esimi}}$ Potentiae $(m+1)^{\text{esimae}}$ obtinetur, quodsi in valore pro Q (14)

$$= \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots(m-n+1).(m-n)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;n\;.\;(n+1)}$$

ponatur $m+1$ pro m, vti tentanti patebit. Ergo quodsi Coefficiens Q i. e. $(n+1)^{\text{esimus}}$ Potentiae alicuius *mesimae* eandem legem seruat, quam ex demonstratis quatuor primi Coefficientes seruant, eandem quoque legem seruat Coefficiens $Q+P$ vel $(n+1)^{\text{esimus}}$ Potentiae proxime superioris $(m+1)^{\text{esimae}}$: ergo si lex (13) assumta Coefficientis indeterminati $(n+1)^{\text{esimi}}$ in aliqua Potentia valet, valet quoque in Potentia proxime superiore. Atqui valet illa reapse in Potentia *tertia*, *quarta*, *quinta*, *sexta*, *septima*, vti ex Schemate superiore (2) euidens est; ergo valet quoque in *octaua*, ergo & in *nona* &c. ergo in *omni*. Ergo Expressiones pro P & Q (14) vniuersalem Coefficientium legem continent. Vnde fluit

17) Theorema. Potentia cuiusuis Exponentis *integri* & *positiui* m Binomii $a+b$, i. e. $(a+b)^m$ est $= a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1\;.\;2} a^{m-2} b^2$

$$+\frac{m\,.\,(m-1)\,.\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}a^{m-3}b^{3}\ldots\ldots$$

$$+\frac{m\,(m-1)\,.\,(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\ldots n}a^{m-n}b^{n}$$

$$+\frac{P\,.\,(m-n)}{n+1}a^{m-n-1}b^{n+1}\ldots+b^{m}.$$

Demonst. Si Coefficientes interim dicantur *A*, *B*, *C*, &c. (8), & sola inprimis lex *Exponentium* (4) exprimatur, erit $(a+b)^m = a^m + A\,a^{m-1}\,b + B\,a^{m-2}\,b^2 + C\,a^{m-3}\,b^3 \ldots + N\,a^{m-n}\,b^n + (N+1)\,a^{m-n-1}\,b^{n+1} \ldots + b^m$.
Namque Exponens Terminorum *consequentium* *a* est = Exponenti Potentiae *m* subtracto *numero* Coefficientinm terminorum *consequentium* (8), & Exponens termini *b* semper est = huic ipsi *Numero Coefficientium* i. e. vbi est Coefficiens *primus* = A, est exponens de *a* = m − 1, & exponens de *b* = 1, & vbi est *Coefficiens* tertius *C*, exponens de *a* est = m − 3 & de *b* = 3. & vbi est Coefficiens N*esimus*, exponens de *a* est m − n & de *b* = n. ita enim Summa Exponentium de *a* & *b* in quolibet Termino *consequente* semper fit, qualis esse debet, aequalis Exponenti Potentiae (5 Coroll. 3). Quod si iam pro Coefficientibus *A*, *B*, *C* &c. rursus ponantur inuenti hactenus eorum valores, prouenit Formula in Theoremate expressa. Nam est $A = \frac{m}{1}$ (9). hinc $A\,a^{m-1}\,b = \frac{m}{1}a^{m-1}b$, & $B = \frac{m\,.\,(m-1)}{1\,.\,2}$ (10), hinc $B\,a^{m-2}\,b^2 = \frac{m\,.\,(m-1)}{1\,.\,2}a^{m-2}b^2$. Sic similiter

fiter $C a^{m-3} b^3 = \frac{m.(m-1).(m-2)}{1.\ 2.\ 3} a^{m-3} b^3$ (11) &

$N a^{m-n} b^n = \frac{m.(m-1).(m-2)..(m-n+1)}{1.\ 2\ \ldots\ 3\ \ldots\ n} a^{m-n} b^n$

(14) & $(N+1)\, a^{m-n-1}\, b^{n+1} = Q\, a^{m-n-1}\, b^{n+1}$

(14) $= \frac{P.(m-n)}{n+1} a^{m-n-1} b^{n+1}$ (15). Ergo praefatum Theorema* est in rigore demonstratum.

* Scholivm. Theorema hoc dicitur *binomiale* a binomio $a+b$, pro cuius vnaquaque Potentia Exponentis *integri*, & *positiui* *Formulam* sistit. Et quia communiter Newtonvs salutatur inuentor eius, etiam *Newtonianum* adpellari solet. Demonstrationem eius cl. Kaestnero (Anfangsgründe der Analysis endlicher Grössen 2te Aufl. pag. 52 seq.) in acceptis referimus, atque iam nunc nonnulla adhuc Corollaria, & insignem eius Vsum expendamus.

18) Coroll. Posito $a=1$ & $b=e$, praecedens Formula (17) abit in hanc $(1+e)^m = 1 + me + \frac{m\,(m-1)}{1.\ 2} e^2 \ldots$

19) Corol. Quia est $(a+b)^m = \left[a.\left(\frac{a+b}{a}\right)\right]^m$

$= a^m.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$ oritur rursus $(a+b)^m = a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b \ldots$ (17), ex serie praecedente (18),

fi

si fiat $e = \frac{b}{a}$, & quilibet huius Seriei Terminus multiplicetur per a^m. Namque tunc est $1 + me + \frac{m(m-1)}{1.2} e^2 = a^m + m.\frac{b}{a}a^m + \frac{m.(m-1)}{1.2}.\frac{b^2}{a^2}.a^m ..$

$$= a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 ..$$

20) Coroll. Posito $n = m + 1$ i. e. Numerum Terminorum *consequentium*, qui est Exponenti *m* ipsius Potentiae aequalis, esse hoc Vnitate maiorem, erit Coefficiens $(m+1)^{esimus} = \frac{m.(m-1)...(m-m-1+1)}{1.2...m+1}$ (14) = o. Et quia quilibet subsequens Coefficiens est Factum ex praecedente in Quotientem, cuius diuisor iam fit $= m+2$, $m+3$ &c. necessario etiam omnes Coefficientes subsequentes, qui vltra debitos accipiuntur, fiunt = o, adeoque Coefficiens *mesimus* est vltimus, & ita Series semetipsam terminat.

VSVS THEOREMATIS BINOMIALIS.

21) Problema. Radicem Binomiam $a+b$ eleuare ad Potentiam e. g. *decimam* ope *Formulae* superioris (17).

Resol. Est

$$a^m = a^{10}$$

$$\frac{m}{1} a^{m-1} b = 10\, a^9 b$$

$$\frac{m.(m-1)}{1.2} a^{m-2} b^2 = 45\, a^8 b^2$$

Est

Est $\left\{\begin{array}{l} \frac{m \,.\, (m-1) \,.\, (m-2)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{m-3} b^3 = 120 a^7 b^3 \\ \frac{m.(m-1).(m-2)..(m-n+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, n} a^{m-n} b^n = 210 a^6 b^4 \\ \frac{P \,.\, (m-n)}{(n+1)} a^{m-n-1} b^{n+1} = \\ \frac{m.(m-1).(m-2)..(m-n+1).(m-n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,..\, n \,.\, n+1} a^{m-n-1} b^{n+1} \\ = \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,.\, 6}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5} a^{10-4-1} b^{4+1} = 252 a^5 b^5 \end{array}\right.$

Porro ponendo iam $n = 5$, quia de Termino *consequente* sexto $= (5+1)^{\text{esimo}} = (n+1)^{\text{esimo}}$ sermo est, erit

$$\frac{P \,.\, (m-n)}{(n+1)} a^{m-n-1} b^{n+1} =$$

$$\frac{m.(m-1).(m-2).(m-3)..(m-n+1).(m-n)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,..\, n \,.\, n+1} a^{m-n-1} b^{n+1}$$

$$= \frac{10 \,.\, 9 \,.\, 8 \,.\, 7 \,...\, 6 \,.\, 5}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,...\, 5 \,.\, 6} a^4 b^6 = 210 a^4 b^6$$

Porro erit ponendo iam $n = 6$, terminus *consequens septimus* $\frac{P \,.\, (m-n)}{(m+1)} a^{m-n-1} b^{n+1} = 120 a^3 b^7$ & Terminus *consequens* octauus, ponendo iam $n = 7$, erit $\frac{P \,.\, (m-n)}{n+1} a^{m-n-1} b^{n+1} = 45 a^2 b^8$. Similiter, ponendo iam $n = 8$, erit Terminus *consequens* nonus $10 a b^9$ & *decimus* i. e. vltimus $= b^{10}$. Vnde

de est $(a+b)^{10} = a^{10} + 10a^9 b + 45 a^8 b^2 + 120 a^7 b^3 + 210 a^6 b^4 + 252 a^5 b^5 + 210 a^4 b^6 + 120 a^3 b^7 + 45 a^2 b^8 + 10 a b^9 + b^{10}$.

22) Problema. Eleuare a—b ad quamlibet Potentiam ope Formulae superioris (17).

Resol. Quia altera Nota radicalis *b* est negatiua, omnes Potentiae eius Exponentis *imparis* fiunt *negatiuae*; hinc Potentiae $(a-b)^m$ terminus *secundus*, *quartus*, *sextus*, & generatim omnis Terminus, cuius Numerus est *par*, fit negatiuus, adeoque Formula superior $(a-b)^m$ abit in hanc $a^m - ma^{m-1} b + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2 - \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{m-3} b^3 \ldots$ vel est (ex praeced. 18) $(1-e)^m = 1 - me + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} e^2 - \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} e^3 \ldots$

23) Problema. Eleuare a+b+c ad Potentiam mesimam ope Formulae superioris.

Resolutio. Fiat $a+b = A$, erit $(a+b+c)^m = (A+c)^m = [(a+b)+c]^m = A^m + \frac{m}{1} A^{m-1} c \ldots$ Atque eodem modo Potentia Radicis 4 pluriumue Terminorum inuenitur.

24) Pro-

24) Problema. Eleuare ope Formulae superioris Radicem mixtam ex integro & fracto ad quamque Potentiam e. g. sextam.

Resol. Est $\left(a + \frac{b}{c}\right)^6 = a^6 + 6a^5 \frac{b}{c} \ldots$

25) Coroll. Posito, Exponentem m esse fractionem e. g. $= \frac{1}{3}$, erit $(a+b)^m = (a+b)^{\frac{1}{3}}$, & Formula superior abit in hanc $a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a^{\frac{1}{3}-1} b \ldots$

26) Cor. Quia est $\sqrt{(d^2 + x^2)} = (d^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ & quia valor de $(d^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ potest sine fine vero propior inueniri (praeced.), liquet, etiam ex Potentiis imperfectis posse Radicem, verae semper propiorem inueniri. Atque ex hoc insignis Theorematis binomialis Vsus maxime intelligitur.

ADDI-

ADDITAMENTVM
AD DISSERTATIONIS IV. NVMERVM 30.
DE VERA INFINITI NOTIONE.

Quaelibet Quantitas & crescere, & decrescere potest sine Termino. Quantitas, cuius incremento limes nullus statui potest, & quae maior omni dabili concipitur, vocatur *infinite magna*, siue simpliciter *infinita* $= \infty$, pariter Quantitas, cuius decremento limes nullus statui potest, & quae minor omni dabili concipitur, *infinite parua*, siue simpliciter *infinitesima* compellatur $= \frac{1}{\infty}$. Ex quibus definitionibus consequitur, neque infinite magnam, neque infinite paruam Quantitatem *actu dari* posse. Dum enim illa omni, quae datur, *maior* est, & haec omni, quae datur, *minor*, profecto *illa*, si daretur, esset maior se ipsa, & *haec*, si daretur, minor se ipsa, quod vtrumque implicat. Igitur infinite magnum non Quantitatis Nomen est; sed Possibilitatis, sine fine, & vltra omnes limites crescendi. Contra infinite paruum non Quantitas est, sed ea Quantitatis adfectio, qua sine limite decrescere, omnique proposita minor fieri potest. Sic e. g. si ponas $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} \ldots$ id est, si dimidii dimidium sumas, & sic capiendo dimidia, sine fine pergas, perspicuum est, quantumcunque exigua pars Vnitatis detur, hanc Bis-

sectio-

ſectionem continuari poſſe, donec perueniatur ad fractionem, data Vnitatis parte minorem; ad fractionem vero, quae omnino nihil ſit, nunquam peruenitur. Non enim fractionis, vtut exiguae, dimidium nihil eſt: peruenitur vero ſemper ad fractionem, Nihilum data quauis Quantitate minus ſuperantem. Praeterea quo plura eiusmodi Dimidia ſibi adduntur, eo propius Summa illorum ad Vnitatem accedit, perpetuo tamen Vnitate minor. Haec, quae vel naturalis Arithmetica edocere quemlibet poteſt, ſic ſolent enuntiari: „Seriei dimidiorum in infinitum continuatae vltimam partem $= z$ euaneſcere (ſiue fieri $z = o$), Summam vero Vnitati eſſe aequalem.“ Patet, hic ſeriem eo continuatam ſumi, quo continuari non poteſt, & vltimam partem fingi, vbi non eſt vltima, Summam vero adpellari id, ad quod Summa vera ſine fine accedere poteſt, vno verbo: quae perpetuo mutantur, vt partes illae ſeriei dimidiorum, & partium Summa, veluti *abſoluta* cogitari, illisque aequalia poni, ad quae mutationibus ſuis ſine fine tendunt.

Hoc ſenſu infiniti vocabulo tributo, nihil *paradoxon* omnibus de *infinito* adſertis contineri perſpicitur, veluti infinitum aliud alio maius, imo infinities maius eſſe. [E. g. ſi quaeratur Terminus tertius geometrice continue proportionalis ad quantitatem finitam $= 1$ & infinite magnam $= \infty$, erit: $1 : \infty : x$, & inde $x = \infty^2$ i. e. erit is quantitas *infinite magna ſecundi ordinis*; & ſenſus Proportionis hic eſt: vti quantitas finita infinities continetur in quantitate infinite magna

primi

primi ordinis $= \infty$, ita quantitas infinite magna primi ordinis $= \infty$ continetur infinities in quantitate infinite magna secundi ordinis. Similiter est $\div \infty : \infty^2 : \infty^3$, adeoque terminus tertius geom. continue proportionalis ad Quantitatem infinite magnam primi ordinis, & Quantitatem infinite magnam secundi ordinis est Quantitas infinite magna *tertii* ordinis, & sic porro. Pariter Quantitatis infinite paruae diuersi ordines sunt, vti patet ex Proportionibus $\div 1 : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2}$ item $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} : \frac{1}{\infty^3}$ &c. id est, sicuti quantitas finita 1 quantitatem infinite paruam primi ordinis $= \frac{1}{\infty}$ infinities continet. (Namque est $1 : \frac{1}{\infty} = 1 \times \frac{\infty}{1} = \infty$) ita quantitas infinite parua primi ordinis $= \frac{1}{\infty}$ continet infinities quantitatem infinite paruam secundi ordinis, eoquod rursus est $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} \times \frac{\infty^2}{1} = \infty$. &c. *] De

vera

*) Cl. KAESTNERVS, ex cuius Differt. mathem. totam ferme hanc de infinito adpendicem sumsimus, ex natura *Trianguli rectanguli* manifestum facit, infinita aliis infinitis infinities maiora esse posse; quae demonstratio licet Tyronibus, Trigonometria necdum imbutis, sit imperuia, eam tamen hic subnectere fas esto, vt, dum Trigonometriam edocti fuerint, eandem possint relegere. Ait nimirum ita: „Trianguli rectanguli angulus vnus $= e$ sit $= 30$ graduum. Igitur Crus ei oppositum, Hypothenusae perpetuo dimidium erit, cuiuscunque magnitudinis sint Crus, & Hypothenusa (Nam si Crus, angulo $= e = 30°$ oppositum vocetur

=

vera hac Infiniti Notione maximi Nominis Geometrae hactenus solliciti non erant. Alius finitorum ad infinita rationem explicaturus, puluillum in vertice montis situm cum ipso monte comparat: alius infinitorum Nihilorum Summam esse aliquid, adfirmat, *) exultans, imaginem se creatricis Potentiae infinitae reperisse, quasi Mathematicorum infinitum idem esset, quod Metaphysici sic vocant, dum de Deo loquuntur. Infinite paruum summus inter Analystas EVLERVS pro Nihilo habet; quoniam vero infinite parua omnia aequalia esse statuere non poterat, Nihilum vnum in data quauis ratione ad aliud esse posse contendit. Cum enim bis Nihil aeque Nihil sit, ac semel Nihil, illud Nihilum, quod bis sumitur, dimidium esse contendit alterius Nihili, quod semel sumebatur.

Ex

$= AB$, & Hypothenusa $= BC$, & Radius $= R$, & sinus anguli $C = S.C$, erit $BC : AB = R : S.C$. Sed $S.C = S.30^o$ est dimidium Radii, vti ex Trigon. constat, ergo & AB erit continuo dimidium Hypothenusae BC). Potest autem Crus AB data quauis Recta maius sumi, & tunc Hypothenusa duplo eiusdem Rectae maior fiet, quod dicunt, Crus infinitum fieri posse, eiusque infiniti duplam fieri Hypothenusam; ita infinita, aliis infinitis infinities maiora intelliguntur."

*) [Eoquod sit $\frac{1}{\infty} \times \infty = \frac{\infty}{\infty} = 1$, adeoque etiam posito, esse in Rigore $\frac{1}{\infty} = 0$, sit $0 \times \infty = 1$. i. e. *Nihilum* infinities sumtum det Quantitatem finitam.]

(Ex quibus hactenus dictis liquet, falli eos, qui contendunt, esse $\frac{1}{\infty} = 0$ *in Rigore*. Vtut enim quantitas $\frac{1}{\infty}$ citra defectum notabilem possit, *comparate* ad quantitates finitas, siue *ad sensum*, poni $= 0$, id est $1 \pm \frac{1}{\infty} = 1$, tamen in Rigore quantitas infinite parua semper manet adhuc quidpiam positiui; adeoque demonstrationes omnes nullae sunt, quibus alii contradictorium euincere student: e. g. dicunt: est $\frac{a}{0} = \infty$ i. e. quantitas finita *a* diuisa per zerum dat quotum infinite magnum, quoniam quo minor est diuisor, manente eodem diuidendo, eo maior resultat quotus — igitur, pergunt, est $a = 0 . \infty$, adeoque $\frac{a}{\infty} = 0$). Ast verus, vti adcute scribit cl. KAESTNERVS, Propositionis $\frac{a}{0} = \infty$ sensus hic est, quotientem $\frac{a}{x}$, quantamcunquelibet Magnitudinem adsequi, diuisiore quantumcunque diminuto, & eandem Magnitudinem, sed negatiuam fieri quotientis $\frac{a}{-x}$. Ipsius autem $\frac{a}{0}$ idea nulla est. Non enim quaeri potest, quoties contineatur *Nihil* in *aliquo*. Scilicet hoc differt $\frac{a}{0}$ ab $a . 0$, quod $a . 0$ significet, nullam quantitatem sumi, hoc est, *Nihil*, adeoque huic signo sensus aliquis subsit. Quaestioni, quid adsit, si nulla quantitas sumatur? aut, quod eodem redit, *siquid non sumatur*, satis perspicue respondetur: „*Nihil*.

„*Nihil.* Illi vero, quoties *Nihil* in aliquo contineatur? responderi omnino non potest. Caeterum per a.o non magis proprio sensu indicatur *productum*, quam per $\frac{a}{o}$ *Quotiens.* Quodsi enim reuera essent Producti a.o duo factores, qui exhibentur, cum sit a.o = b.o, esset a:b = o:o, seu Nihila duo essent in data quauis Ratione. EVLERVS hoc reuera ex posita illa Productorum aequalitate intulit. Sed vereor, vt haec lectoribus suis persuadeat. Contra erunt, qui de Principio dubitabunt, ex quo adeo aduersa colliguntur, ac hoc est „*Nihilum vnum dimidium esse posse alterius.*" Qui signorum vim adcuratius rimantur, in aequalitate a.o = b.o hoc saltim videbunt, Nihil haberi, siue *a* non sumatur, siue *b*, adeoque Multiplicationem, & hinc colligendam Proportionem non concedent. — Si ex eo, quod 2.o = 3.o recte inferatur, alterum Nihilum continere duas tertias alterius, simili modo multa alia possunt demonstrari, quibus sensus, ratioque repugnet. . . .

Quaecunque ostendis mihi sic, incredulus odi.

HORATIVS.

Anmerkung für die Buchbinder.

Die Ursache, warum nach dem Buchstaben I die IVte Dissertation und die folgenden wieder mit den Anfangsbuchstaben des Alphabets bezeichnet sind, ist, weil mit der 4ten und den folgenden Dissertationen der Anfang des Druckes gemacht worden ist, indem eben diese Materien damahls öffentlich vorzutragen waren. Bey dem Einbinden hat man sich also nach der mit römischen Ziffern bezeichneten Ordnung der Dissertationen, und nicht nach diesen Buchstaben zu richten.

Errata.

Dissertat. I. Nota ad §. 9. pro SCHVLZE legatur SCHVLZ.

Ibidem §. 10. lin. 11. Tyronum leg. Tironum.

Ibidem pag. 12. pro §. 11. leg. 12.

Ibidem pag. 46. lin. 15. Nominator l. Numerator.

Differt. II. pag. 88. lin. vlt. post 1786 addatur S. 129. 121.

Differt. III. pag. 17. lin. 7 maiot leg. maior.

Differt. IV. pag. 1. lin. 4 pro 1: e. leg. i. e. siue „id est.“

Ibidem pag. 13. lin. 12 $B = 1\frac{2}{7}$ legat. $= 2\frac{1}{21}$.

Ibidem pag. 24. lin. 18 nde leg. inde.
